Enuncie o teorema de inducao estrutural para G.
R: O Princıpio de Inducao Estrutural para G
pode ser enunciado da seguinte forma.
Seja P(x) uma propriedade relativa aos elementos
x 2 G e suponhamos que:
(1) P(a) e verdadeira;
(2) para qualquer x 2 G, se P(x) e verdadeira, entao P(xa) e verdadeira;
(3) para quaisquer x, y 2 G, se P(x) e P(y) sao verdadeiras, entao P(x * y)
e verdadeira.
Entao P(x) e verdadeira, para todo o x 2 G.

Exemplos

A **complexidade lógica** de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   - a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   - b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   - c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   - d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Definição

Uma **valoração** é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

- a) $v(\perp) = 0$;
- b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
- c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
- d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
- e) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;
- f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o **valor lógico** de φ para a valoração v.

Demonstração.

Seja $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0, 1\}$ a única função que resulta da aplicação do Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$ em que:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $v(p_i) = g(p_i)$;
2. $v(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   - a) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
   - b) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
   - c) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;
   - d) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Então v é uma valoração tal que $v(p_i) = g(p_i)$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e como referimos acima é a única função nestas condições. □

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \perp) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Proposição

Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula. Se $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para todas as variáveis $p_i \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Demonstração.

A demonstração efectua-se usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$ [Exercício]. □

Definição

Uma fórmula φ diz-se ***logicamente equivalente*** a uma fórmula ψ, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Ou seja, tem-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ se $v(\varphi) = v(\psi)$ para toda a valoração v.

Exemplo 1

Tem-se $\quad p_0 \rightarrow p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \rightarrow \neg p_0$

pois, como vimos no exemplo anterior, a fórmula

$$(p_0 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_0)$$

é uma tautologia. Mais geralmente, pode-se mostrar que

$$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

para todas as fórmulas φ e ψ.

Esta equivalência lógica é muito útil pois é ela que permite as ***"demonstrações por contra-recíproco"***. Ou seja, quando se quer provar uma proposição do tipo "se φ, então ψ", pode-se provar alternativamente a proposição "se $\neg\psi$, então $\neg\varphi$".

Teorema

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes **equivalências lógicas**:

- i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
  $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)
- ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)
- iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)
- iv) $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)
- v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
  $\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)
- vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
  $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)
- vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Teorema

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

- i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$,
- ii) $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,
- iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
- v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
- vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \perp$,
- vii) $\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

Definição

Seja ψ uma fórmula do Cálculo Proposicional e seja p_i uma variável proposicional. A função

$$\begin{array}{rccc} [\psi/p_i]: & \mathcal{F}^{CP} & \longrightarrow & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ representa a fórmula obtida de φ pela ***substituição*** de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

1. Para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se } n = i \\ p_n & \text{se } n \neq i \end{cases}$;
2. $\perp[\psi/p_i] = \perp$;
3. Para todo o $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\quad (\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
   $$(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \square \varphi_2[\psi/p_i]).$$

Teorema (Generalização)

Sejam φ e ψ duas fórmulas e p_i uma variável proposicional. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração.

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida, para cada variável proposicional p_n, por

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases}$$

Prova-se (Exercício 3.7) que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.
Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$, donde se deduz que $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.
Dado que v é uma valoração qualquer, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia. □

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então

$$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2 \text{ se e só se } \forall\varphi \in \mathcal{F}^{CP}\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\forall\varphi \in \mathcal{F}^{CP}\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   - i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   - ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
   $$\begin{aligned} v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) &= v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i]) \\ &\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]). \end{aligned}$$
   Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\forall\varphi \in \mathcal{F}^{CP}\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é **completo**. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \subset \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\perp) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   - a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   - b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   - c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   - d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   - e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Definição

- As variáveis proposicionais, p_i, e as negações de variáveis proposicionais, $\neg p_i$, são chamadas (fórmulas) ***literais***.
- Fórmulas do tipo
  - i) $(\ell_{11} \vee \cdots \vee \ell_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{n1} \vee \cdots \vee \ell_{nm_n})$
  - ii) $(\ell_{11} \wedge \cdots \wedge \ell_{1m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{n1} \wedge \cdots \wedge \ell_{nm_n})$

  onde os ℓ_{ij} são literais e $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, são chamadas, respectivamente, ***formas normais conjuntivas*** (FNC) e ***formas normais disjuntivas*** (FND).

Exemplos

1) Um literal ℓ é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva (basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $\ell_{11} = \ell$, na definição de formas normais).

Exemplos

2) A fórmula $\neg p_0 \wedge p_5 \wedge \neg p_5$ é simultaneamente uma
   - FNC ($n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{21} = p_5$ e $\ell_{31} = \neg p_5$)
   - FND ($n = 1$, $m_1 = 3$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{12} = p_5$ e $\ell_{13} = \neg p_5$).

   A fórmula $p_0 \vee \neg p_2$ é também uma FNC e uma FND.

   Em geral, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.
3) A fórmula $(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2)$ é uma FNC, mas **não é** uma FND.
4) A fórmula $\neg(p_2 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee \neg p_1$ **não é** uma FNC **nem** uma FND.

Teorema

Para cada fórmula φ, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

1ª Demonstração.

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conectivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas
   $$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 & \Leftrightarrow & (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1), \\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 & \Leftrightarrow & \neg\varphi_1 \vee \varphi_2, \\ \perp & \Leftrightarrow & p_0 \wedge \neg p_0. \end{array}$$
2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

2ª Demonstração.

Uma demonstração alternativa do teorema pode ser feita recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ. Vejamos como obter uma FND, φ^d, logicamente equivalente a φ.

- Se φ é uma **contradição**, toma-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Senão suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ pode ser representada na seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha $i \rightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

  onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Definição

Sejam v uma valoração e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que:

- v ***satisfaz*** Γ, e escreve-se $v \models \Gamma$, se $\forall_{\varphi\in\Gamma}\ v(\varphi) = 1$.
- v ***não satisfaz*** Γ, e escreve-se $v \not\models \Gamma$, se $\exists_{\varphi\in\Gamma}\ v(\varphi) = 0$.

Exemplos

1) Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$ e consideremos os conjuntos
   $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0, \perp \vee p_0\}$ e
   $\Gamma_2 = \{p_0 \rightarrow p_2, \perp \vee p_0\}$. Então
   - $v \models \Gamma_1$ pois $v(p_0 \wedge \neg p_2) = v(p_2 \rightarrow p_0) = v(\perp \vee p_0) = 1$.
   - $v \not\models \Gamma_2$ já que $v(p_0 \rightarrow p_2) = 0$.
2) $v \models \emptyset$ para toda a valoração v.

Definição

Um conjunto Γ de fórmulas diz-se:

- ***(semanticamente) consistente*** se existe alguma valoração que o satisfaça.
- ***(semanticamente) inconsistente*** se não é consistente, i.e., se $v \not\models \Gamma$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0, \perp \vee p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos exemplos anteriores, Γ_1 é satisfeito por toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
2) O conjunto $\Gamma_2 = \{p_0 \rightarrow p_2, \perp \vee p_0\}$ dos exemplos anteriores também é consistente já que Γ_2 é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 1$.

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Lema

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração: É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. □

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se $\forall_{\psi \in \Gamma}\ v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Teorema

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia. □

Teorema

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício. □

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.

ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$.

iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Demonstração.

"$ii) \Longleftrightarrow iii)$" é um caso particular da alínea iv) do teorema anterior.

"$i) \Longleftrightarrow ii)$" é um caso particular da equivalência

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$$

onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas. Esta equivalência pode ser demonstrada por indução sobre n (exercício). □

Teorema (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$ e, por redução ao absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$ o que não é possível pois v é uma função. Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. □

1. Seja X o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{a, b, +, -, (,)\}$ e seja G o conjunto gerado pela seguinte definição indutiva determinista sobre X.

$$\frac{}{a \in G}\ a \qquad \frac{x \in G}{(x - b) \in G}\ - \qquad \frac{x \in G \quad y \in G}{(x + y) \in G}\ +$$

Seja ainda $g : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ a única função que satisfaz as seguintes condições:

- $g(a) = 0$;
- $g\big((x - b)\big) = g(x) - 1$, para todo o $x \in G$;
- $g\big((x + y)\big) = g(x) + g(y)$, para todos os $x, y \in G$.

(a) Construa uma árvore de formação do elemento $u = ((a - b) + (((a + a) - b) - b))$ de G.

(b) Calcule $g(u)$, onde u é a palavra da alínea anterior.

(c) Enuncie o Princípio de indução estrutural para G.

(d) Prove por indução estrutural que, para todo o $x \in G$, $g(x) \leq 0$.

(e) Considere a função $h : G \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que, para todo o $x \in G$, $h(x)$ é o número de ocorrências da letra b na palavra x. Defina a função h por recursão estrutural.

(f) Identifique, sem justificar, qual a relação que existe entre as funções g e h.

2. Seja φ a seguinte fórmula do Cálculo Proposicional:

$$\varphi = (p_0 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1).$$

(a) Indique uma fórmula logicamente equivalente a φ onde apenas ocorram os conectivos $\neg$ e $\to$.

(b) Mostre que $\varphi \models \neg p_1$.

(c) φ é uma tautologia?

3. Considere as seguintes proposições:

- Se a escola fecha, o país poupa.
- O futuro será melhor se e só se a escola não fecha.
- O país poupa ou o futuro não será melhor.

(a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

(b) Mostre que, se as três proposições acima são simultaneamente verdadeiras, então o país poupa.

4. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

(a) $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\models \neg\varphi$ ou $\models \psi$.

(b) Se Γ é inconsistente, então todo o subconjunto de Γ é inconsistente.

(c) Se φ é uma contradição e $\Gamma \models \varphi$, então Γ é inconsistente.

2) φ = (7p0 v p1) ⋀ (7p0 v 7p1)

a) ψ ⇔ φ , conectivos de ψ : 7,->

⇔ (7p0 v p1) ⋀ (7p0 v 7p1)

⇔ (p1->p0) ⋀ (p0 -> 7p1)

⇔ (p1->p0) ⋀ 77(p0 -> 7p1)

⇔ 7(p1->p0) -> 7(p0 -> 7p1)

b) φ |= 7p1 (sempre que φ e Vrd, 7p1 e Vrd)

P0	P1	P0v7p1	7p0v7p1	φ	7p1
1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Pela analise da tabela, sempre que φ toma Valor logico 1(L. 2 e 4), 7p1 tambem toma o valor Logico 1, Logo φ |= 7p1

c) Pela tabela construída em b), φ nem sempre tem o valor logico 1, pelo que não e tautologia!

1 a) u = ((a-b)+(((a+a)-b)-b))

Sequencia de formação:

a, (a-b), (a+a), ((a+a)-b), (((a+a)-b)-b),

((a-b)+(((a+a)-b)-b)) porque cada elem. da sequencia, ou pertence à base da definição indutiva ou é obtida por aplicação das regras 2) e 3) a elementos anteriores da sequencia, sendo o ultimo elemento u!

b) calcular g(u) u = ((a-b)+(a+a)-b)-b))

= g((a-b)) +g(((a+a)-b)-b) = g(a) -1 + g((a+a)-b) – 1

= 0 -1 + g(a) +g(a) -1 – 1 = 0 -1+0+0-1-1 = -3

c) Principio de Induçao estrutural

Seja P(u) uma propriedade sobre os elementos u de G

Se 1) P(a)

2) Se P(u) então P((u -b)), para todo u € G

3) Se P(u) e P(y) então P((u +y)), para todo u € G

Então P(u) para todo u € G

d) P(u) = g(u)<= 0

1) g(a) = 0 <= 0

Logo, P(a)

2) Seja u € G tal que P(u) (H.I)

Queremos provar P((u-b)), sabemos que g(u)<= 0

g((u-b)) = g(u) -1 <= 0 portanto, P((u-b))

|<= 0| por H.I

3) sejam u,y € G tais que P(u) e P(y) , ou seja, [g(u)<= 0 e g(y)<= 0] [H.I]

?P(u+y)?

g((u+y)) = g(u) + g(y) Logo, P((u+y))

|<= 0| |<= 0| por H.I

Por 1) 2) 3), pelo Principio de indução estrutural estrutural em G, P(u), para todo u€ G

e) h G -> N₀ h(u)= nº de ocurrencias da letra b na palavra u.

h e definido por recursão estrutural por:

1) h(a) = 0

2) h((u-b)) = h(a) +1, para todo u € G

3) h((u+y)) = h(u)+ h(y) , para todo u,y € G

f) g<= h

3)p0: escola fecha p1: pais poupa p2: futuro melhor

a) p0 -> p1 : φ 7p0 <-> p2: ψ p1vp2 :ω

b)

P0	P1	P2	φ	ψ	ω
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Pela analise da tabela, φ ψ ω são simultaneamente verdadeiras nas linhas 2 e 5, nas quais p1 é verdadeira,

Logo o pais poupa!

4)

a) |= φ -> ψ se e só se |= 7 φ ou |= ψ

v(φ -> ψ) : v(φ) = 0 ou v(ψ) = 1

φ	ψ	φ -> ψ	7 φ	
1	1	1	0	|≠ 7 φ
1	0	1	1	
0	1	0	1	
0	0	1	1	|≠ ψ

FALSO

b) Se Γ é inconsistente, então todo o subconjunto de Γ é inconsistente!

Γ = {p0,p1,7p0} inconsistente

Δ = {p0} consistente

Δ C Γ logo a afirmação e falsa

c) φ é contradição e Γ |= φ

Γ é inconsistente

Hipóteses
1) φ é contradição : v(φ) = 0 para qualquer valoração v
2) Γ |= φ : sempre que v satisfaz Γ, temos v(φ) = 1

Suponhamos que Γ é consistente, então, existe valoração v que satisfaz Γ

Para essa valoração, v(φ) =1(hip. 2) mas isso contradiz a hip. 1, logo, Γ inconsistente. A afirmação e verdadeira!