Teste modelo

Grupo I

1) Falso. (Contra exemplo $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \times)$ semigrupo onde é válido a lei do Corte que não é grupo)

2) Falso: (Contra exemplo: $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$ grupo
$H = \{\bar{1}\} \subseteq \mathbb{Z}_3$ e H ñ é grupo
pois $\bar{0} \notin H$)

3) Verdadeiro
Se $o(a) = 12$ para algum $a \in G$ então

$$o(a^4) = \frac{12}{mdc(4,12)} = \frac{12}{4} = 3$$

Grupo II

Alternativa 1:

1) Não existe. Qualquer subgrupo de um grupo comutativo é tb comutativo

2) $G = D_3$ e $H = \{\rho_1\}$ (subgrupo trivial). Neste caso $H < D_3$ e como D_3 ñ é comutativo, H é trivialmente comutativo.

3) Não existe. Se $o(a) = 5$ então $o(a^3) = \frac{5}{mdc(3,5)} = 5$

Alternativa 2

Começamos por "ver" quem é a identidade do grupo e quem é o inverso de 1 elemento (a,b) qq do grupo.

- $1_G = (0,1)$ pois
$$(a,b)*(0,1) = (a + b\times 0,\ b\times 1) = (a,b)$$
$$(0,1)*(a,b) = (0 + a\times 1,\ 1\times b) = (a,b)$$

- Dado $(a,b)\in G$, (a',b') é inverso de (a,b) se
$$(a,b)*(a',b') = (a',b')*(a,b) = (0,1)$$

Como
$$(a,b)*(a',b') = (0,1) \Leftrightarrow (a+ba', bb') = (0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a+ba' = 0 \\ bb' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -a/b \\ b' = 1/b \end{cases}$$

e
$$\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)*(a,b) = \left(-\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\times a,\ \frac{1}{b}\times b\right) = (0,1)$$

temos que
$$(a,b)^{-1} = \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$$

a) 1) $K \neq \emptyset$ pois $1_G = (0,1)\in K$

2) $(a,1),(b,1)\in K \Rightarrow (a,1)*(b,1) = (a+1\times b, 1\times 1) = (a+b,1)\in K$

3) $(a,1)\in K \Rightarrow (a,1)^{-1} = \left(-\frac{a}{1}, \frac{1}{1}\right) = (-a,1)\in K$

Por 1), 2) e 3), $K < G$.

b) $o((a,b)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b) \neq (0,1) \\ (a,b) * (a,b) = (0,1) \end{cases}$

$(a,b) * (a,b) = (0,1) \Leftrightarrow (a+ba, b^2) = (0,1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+ba=0 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=0 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0a=0 \\ b=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}}}_{\text{porque } (a,b)\neq(0,1)} \vee \begin{cases} a \ \overline{qq} \\ b=-1 \end{cases}$

Logo, $\{(a,b) \in G : o((a,b)) = 2\} = \{(a,-1) : a \in G\}$

c) Não. Porque a identidade de G não tem ordem 2.