Departamento de Matemática — Universidade do Minho

Álgebra — 2º teste – 14 jan 2021

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano — duração: duas horas

Nome ______________________________

Curso ______________________________ Número ______________

Responda no próprio enunciado, seguindo rigorosamente as instruções dadas em cada um dos grupos

GRUPO I

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20.

1. Seja A um anel comutativo com identidade de caraterística 12. Então, A não é um domínio de integridade. V☐ F☐
2. Se I e J são ideais de um anel A tais que $I \cap J = \{0_A\}$, então, para todos $i \in I$ e $j \in J$, $ij = 0_A$. V☐ F☐
3. A soma de dois subanéis de um anel A nunca é um subanel de A. V☐ F☐
4. Sejam A um anel com identidade e I e J ideais maximais de A. Se $I \neq J$ então $IJ = I \cap J$. V☐ F☐
5. Sejam A e A' anéis comutativos com identidade e $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então $\varphi(1_A) = 1_{A'}$. V☐ F☐

GRUPO II

Em cada uma das questões seguintes, apresente a sua resposta sem qualquer justificação. Cada questão está cotada com 1,0 valores numa escala de 0 a 20.

1. Indique a ordem da permutação $\alpha = (1\,2\,3)(2\,4\,5\,7)$ de $\mathcal{S}_7$:

____

2. Indique os elementos de $< \beta^3 >$, sabendo que $\beta = (1\,2\,3)(4\,5) \in \mathcal{S}_6$:

____

3. Indique a paridade da permutação $\gamma \in \mathcal{S}_9$, sabendo que $\gamma^5 = (1\,2\,3)(4\,5\,7\,9)$:

____

4. Indique duas permutações de $\mathcal{S}_9$, com a mesma ordem mas de paridades diferentes:

____

GRUPO III

Em cada uma das questões seguintes, apresente a sua resposta devidamente justificada. Cada questão está cotada com 4,0 valores numa escala de 0 a 20.

1. Seja A um anel não nulo. Mostre que:

   (a) se $a \in A$ é um elemento de ordem 12, então A tem um divisor de zero.

   (b) se, para todos $a \in A \backslash \{0_A\}$ e $b, c \in A$,
   $$ab = ca \Rightarrow b = c,$$
   então A é um anel comutativo.

2. Sejam A um anel comutativo com identidade, $a, b \in A$ e $I = \{ax + by : x, y \in A\}$.

   (a) Mostre que I é um ideal de A.

   (b) Para $A = \mathbb{Z}$, dê exemplo, justificando, de elementos a e b para os quais:

      i. $I = A$;

      ii. I é um ideal maximal de A.

3. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f_n : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ a aplicação definida por $f_n([x]_n) = ([x]_n)^n$, para todo $[x]_n \in \mathbb{Z}_n$.

   (a) Justifique que f_4 não é um endomorfismo de anéis.

   (b) Mostre que f_3 é um endomorfismo de anéis e determine o seu núcleo.

   (c) Para que valores de n f_n é um endomorfismo de anéis?

GRUPO IV

Esta questão é facultativa. Caso opte por responder, apresente a sua resposta devidamente justificada. A questão está cotada com 2,0 valores extra escala.

1. Considere o subconjunto $X = \{3+\sqrt{-5}, 7+\sqrt{-5}\}$ do domínio de integridade $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Mostre que

$$\exists^1 x \in X : (x) \text{ é maximal na classe dos ideais principais de } D.$$