Departamento de Matemática	Universidade do Minho
Álgebra	2º teste – 13 dez 2019
Lic. em Matemática - 2º ano	duracão: duas horas

Nome ______________________________________ Número __________

1. **Sem justificar**, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das seguintes proposições, assinalando a opção conveniente:

   (a) Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $o(\sigma) \leq n$. **V** **F**

   (b) Se $\sigma \in \mathcal{S}_8$ tem ordem 5, então, $<\sigma>=<\sigma^4>$. **V** **F**

   (c) Se A é um anel e $a, b \in A$, então, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. **V** **F**

   (d) Existe pelo menos um domínio de integridade de característica 10. **V** **F**

   (e) Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e I um ideal de A. Então, $\varphi(I)$ é um ideal de A'. **V** **F**

   (f) O anel $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ é domínio de integridade. **V** **F**

   (g) Nenhum elemento invertível de um anel com identidade é divisor de zero. **V** **F**

   (h) Dados I e J ideais próprios de um anel A, se $I \cap J$ é ideal maximal de A, então $I = J$. **V** **F**

2. Considere os seguintes anéis comutativos com identidade:

$$A_1 = \mathbb{Z}_{10} \qquad A_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \qquad A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$$

   (a) Indique, **sem justificar**:

   i. a identidade de cada anel:

   $1_{A_1} =$ __________ $1_{A_2} =$ __________ $1_{A_3} =$ __________

   ii. a característica de cada anel:

   $c(A_1) =$ __________ $c(A_2) =$ __________ $c(A_3) =$ __________

   iii. um elemento $x \in \mathcal{U}_A \backslash \{1_A\}$ para:

   $A = A_1 :$ __________ $A = A_2 :$ __________ $A = A_3 :$ __________

   (b) Quais dos anéis têm divisores de zero não nulos? Indique, caso existam, um divisor de zero não nulo de cada um desses anéis. Justifique.

3. Considere, em $\mathcal{S}_9$, as permutações

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(2\,6\,7\,9\,5\,1) \qquad\qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 9 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Escreva $\sigma\tau^{-1}$ como produto de ciclos disjuntos.

(b) Determine $o(\sigma)$.

(c) Indique, justificando, os elementos de $< \tau^3 >$.

(d) **Sem efetuar cálculos com composição de funções**, mostre que não existe $\delta \in \mathcal{S}_9$ tal que $\delta^2\tau = \sigma$.

4. (a) Mostre que $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definida por $\varphi(n) = [6n]_{10}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, é um homomorfismo de anéis e determine o seu núcleo.

   (b) Seja A um anel comutativo com identidade tal que

$$\forall x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} : x^n = x.$$

   Mostre que todo o ideal primo de A é um ideal maximal de A.

5. Considere o domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Recorde que $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]} = \{-1, 1\}$.

   (a) Mostre que $1 + \sqrt{-5}$ é irredutível em $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

   (b) Mostre que $1 + \sqrt{-5}$ não é um elemento primo em $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

   (c) Determine $[1 + \sqrt{-5}, 12]$.

Cotação: **1.** 6 valores; **2.** 4 valores; **3.** 3 valores; **4.** 4 valores; **5.** 3 valores