Departamento de Matemática e Aplicações — Universidade do Minho

Álgebra — 1º teste - 10 jan 2019

Licenciatura em Ciências de Computação - 2º ano — duração: duas horas

---

1. Considere, no grupo S_6, as permutações

$$\beta = (2\,5\,4)\,(1\,5)\,(2\,6\,4\,3) \qquad \text{e} \qquad \alpha = (1\,5\,3)\,(2\,6).$$

   (a) Determine, em extensão, o subgrupo $< \beta^{-154} >$.

   (b) Determine a ordem e a paridade de α.

   (c) **Sem efetuar cálculos com composição de funções**, determine $\delta \in S_6$ tal que

$$\delta\,(\beta^2\alpha^3)^{-2}\,(4\,3) = \delta^2(1\,2\,3)^{-1}.$$

2. Num anel A, chama-se *idempotente* a qualquer elemento $e \in A$ tal que $e^2 = e$. Determine os idempotentes do anel $\mathbb{Z}_{12}$.

3. Sejam A um anel comutativo não nulo, q um elemento arbitrariamente fixo em $A\backslash\{0\}$ e

$$J_q = \{a \in A : \, aq = 0_A\}.$$

   (a) Mostre que J_q é um ideal de A.

   (b) Mostre que o ideal J_q é nulo se e só se q não é divisor de zero.

4. Seja A um domínio de integridade com caraterística 2. Mostre que a aplicação $\theta : A \longrightarrow A$ definida por $\theta(x) = x^2$, para qualquer $x \in A$, é um morfismo de anéis.

   Recorde que um anel tem caraterística $n \in \mathbb{N}$ se n é o menor número natural tal que $na = 0_A$, para qualquer $a \in A$.

5. Considere o morfismo de anéis $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$, definido por $\varphi(x) = ([x]_{12}, [x]_{18}$, para qualquer $x \in \mathbb{Z}$.

   (a) Determine o núcleo de φ.

   (b) Diga, justificando, se o morfismo φ é sobrejetivo.

6. Seja A um domínio de integridade e $p, q \in A$ elementos associados. Mostre que se p é primo então q é primo;

7. Diga, **sem justificar**, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

   (a) O anel $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{R}$ é um domínio de integridade;

   (b) Nenhum dos ideais $23\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \{0\}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é maximal;

   (c) No anel $\mathbb{Z}_9$ a igualdade $[51]_9 \times [-40]_9 + ([4]_9)^{-1} = [0]_9$ é verdadeira;

   (d) Qualquer corpo é um domínio de integridade;

   (e) Num domínio de integridade D, uma unidade divide qualquer elemento de D.