Departamento de Matemática e Aplicações | Universidade do Minho

Álgebra | 2º teste – 5 jan 2018

Licenciatura em Ciências de Computação - 2º ano | duração: duas horas

1. **Sem justificar**, diga se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:
   (a) Um grupo é cíclico se e só se tem ordem prima;
   (b) O anel $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ é um corpo;
   (c) Em qualquer domínio de integridade, elementos associados geram o mesmo ideal;
   (d) Num anel com característica 2, qualquer elemento coincide com o seu próprio simétrico;
   (e) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, $[n-1]_n \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}_n}$;
   (f) Anéis isomorfos têm a mesma característica;
   (g) No anel $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$,
   (i) o ideal $8\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ é primo;
   (ii) o ideal $3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é maximal;
   (iii) o ideal $\{0\} \times \mathbb{Z}$ é primo e maximal.

2. Considere, no grupo $S_7$, as permutações

$$\beta = (1\,3\,2\,4)\,(7\,3\,2) \qquad \text{e} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine, em extensão, o subgrupo $< \beta^{40} >$.
   (b) Sem efectuar o produto $\alpha^{-1}\beta^3\alpha$, diga qual é a ordem da permutação $\alpha^{-1}\beta^3\alpha$.
   (c) Determine $\delta \in S_7$ tal que $\delta\alpha^{942} = \beta^{-9}$. Apresente $\delta$ como produto de ciclos disjuntos.

3. Seja $G = \langle\, b\,\rangle$ um grupo cíclico de ordem 45.
   (a) Determine a ordem dos elementos $b^9$ e $b^{41}$.
   (b) Dê exemplo, caso existam, de quatro elementos $a, x, c, d \in G$ com ordem 9, 6, 45 e 50 respectivamente. Justifique.

4. Considere os anéis $\mathbb{Z}_{32}$ e $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ e o morfismo de anéis $\theta : \mathbb{Z}_{32} \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ definido por $\theta([n]_{32}) = ([n]_4, [n]_6)$, para qualquer $[n]_{32} \in \mathbb{Z}_{32}$.
   (a) Calcule $\operatorname{Nuc}\theta$ e diga, justificando, se o morfismo $\theta$ é um monomorfismo.
   (b) O elemento $([1]_4, [5]_6)$ pertence a $\operatorname{Im}\theta$? Porquê?
   (c) Diga, justificando, se o morfismo $\theta$ é um epimorfismo.

5. Seja $A$ um anel comutativo com identidade e $I$ um ideal de $A$.
   (a) Mostre que se o produto de dois elementos de $A$ é um divisor de zero, então um dos factores é também um divisor de zero.
   (b) Sejam $a \in A \setminus I$ e $K = \{xa + i : x \in A,\, i \in I\}$. Mostre que $K$ é o ideal de $A$ gerado pr $I \cup \{a\}$.
   (c) Mostre que o ideal $I$ é maximal se e só se, para qualquer $a \in A \setminus I$, a equação $xa + y = 1_A$ tem solução $(x, y) \in A \times I$.

6. Mostre que, no domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$, o elemento $4 + \sqrt{-11}$ é irredutível e não é primo.