Álgebra — 2º teste/teste global – 19 dez 2016

Licenciatura em Ciências de Computação - 2º ano

Para realizar o TESTE GLOBAL, responda às perguntas 1 - 6
Para realizar o 2º TESTE, responda às perguntas 3 - 8

1. Sejam G um grupo e $H = \{(x,x) : x \in G\}$.
   (a) Mostre que H é subgrupo do produto direto $G \times G$.
   (b) Mostre que $H \lhd G \times G$ se e só se G é abeliano.
   (c) Para $G = \mathbb{Z}_6$, determine um elemento de H que tenha ordem 3.
   (d) Para $G = \mathbb{Z}_3$, mostre que H é cíclico.

2. Um grupo G diz-se simples se não admite subgrupos diferentes de $\{1_G\}$ e de G.

   Sejam G um grupo simples, G' um grupo e $\varphi : G \to G'$ um morfismo de grupos não constante. Mostre que G' admite um subgrupo isomorfo a G.

3. Seja $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & a & 1 & 3 & b & c & d \end{pmatrix}$ uma permutação de S_7.
   (a) Considere $a = 2$, $b = 7$, $c = 5$ e $d = 6$.
      i. Mostre que σ é uma permutação par.
      ii. Determine σ^{16}.
      iii. Existe $\tau \in S_7$ tal que $o(\tau\sigma) = 8$? Justifique.
   (b) Dê exemplo, ou justifique que não é possível, de valores de a, b, c e d de tal modo que σ tenha ordem 12.

4. Sejam A um anel comutativo com identidade e $a \in A$.
   (a) Mostre que $R_a = \{x \in A : xa = 0_A\}$ é um ideal de A.
   (b) Mostre que o ideal é próprio se e só se $a \neq 0_A$.
   (c) Determine R_a se:
      i. A é domínio de integridade e $a \neq 0_A$;
      ii. $A = \mathbb{Z}_{12}$ e $a = [2]_{12}$.

5. Sejam A um anel não nulo com identidade 1_A e $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ a aplicação definida por $\varphi(n) = n1_A$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Mostre que φ é um morfismo de anéis.
   (b) Determine $\mathrm{Nuc}\varphi$ se:
      i. $o(1_A) = \infty$;
      ii. $A = \mathbb{Z}_6$.

6. Considere o domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   (a) Determine o conjunto das unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   (b) Mostre que $1+\sqrt{-7}$ é irredutível em $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   (c) Mostre que $1+\sqrt{-7}$ não é um elemento primo em $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

   (d) Determine $[1+\sqrt{-7}, 4]$.

7. Sejam K um corpo, A um anel não nulo com identidade e $\alpha : K \to A$ um homomorfismo de anéis tal que $\alpha(1_K) = 1_A$. Mostre que existe um subanel de A isomorfo a K.

8. Seja A um anel comutativo com característica 3. Mostre que:

   (a) $(a+b)^3 = a^3 + b^3$;

   (b) $B = \{a \in A : a^3 = a\}$ é um subanel de A.