Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Álgebra | Resolução | 1º teste – 5 dez 2020

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano | duração: duas horas

Nome ______________________________

Curso ______________________ Número ______________

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas não têm qualquer penalização.

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Sejam S um conjunto e $a, b \in S$. Se $*$ é uma operação binária em S, então $a * b = b * a$. V☐ F☒

   Se $*$ é uma operação binária em S, apenas sabemos que $a * b$ e $b * a$ são elementos de S.

1. Sejam $(S, *)$ um grupóide e $a, b \in S$. Se $a * b = b * a$ então $*$ é comutativa. V☐ F☒

   Os elementos a e b são dois dos elementos de S. Para concluirmos que $*$ é comutativa tinha de ser referido que $a * b = b * a$, para todos os elementos a e b em S.

1. Seja $(S, *)$ um grupóide não comutativo. Então, para todos $a, b \in S$, $a * b \neq b * a$. V☐ F☒

   Para $*$ não ser comutativa basta que $a * b \neq b * a$ para dois elementos de S e não para todos os elementos de S.

1. Sejam $(S, *)$ um grupóide e $a, b \in S$ tais que $a * b \neq b * a$. Então, $(S, *)$ é um grupóide não comutativo. V☒ F☐

   Para $*$ não ser comutativa basta que $a * b \neq b * a$ para dois elementos de S e não para todos os elementos de S.

---

2. Se G é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a \neq b$ então $a^2 \neq b^2$. V☐ F☒

   Basta pensar num grupo com dois elementos $G = \{1_G, a\}$. Neste grupo, $a^2 = 1_G = 1_G^2$.

2. Se G é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a^2 = b^2$ então $a = b$. V☐ F☒

   Basta pensar num grupo com dois elementos $G = \{1_G, a\}$. Neste grupo, $a^2 = 1_G = 1_G^2$ e $a \neq 1_G$.

2. Se G é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a^2 \neq b^2$ então $a \neq b$. V☒ F☐

   Num grupóide G, temos que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, que é o recíproco do que está na afirmação. Como um grupo é um grupóide...

2. Se G é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a^2 = b^2$ então $a^3 = b^3$. V☐ F☒

   Basta pensar num grupo com dois elementos $G = \{1_G, a\}$. Neste grupo, $a^2 = 1_G = 1_G^2$ e $a^3 = a \neq 1_G = 1_G^3$.

---

3. Existe um conjunto finito X tal que $(X, *)$ não é grupo qualquer que seja a operação binária $*$ definida em X. V☒ F☐

   Existe o conjunto vazio.

3. Dado um conjunto finito não vazio qualquer X, é possível definir em X uma operação binária $*$ tal que $(X, *)$ é um grupo. V☒ F☐

   Para $n \in \mathbb{N}$, temos sempre o grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$. Assim, dado um conjunto com n elementos, basta pensarmosnuma aplicação bijetiva de $\mathbb{Z}_n$ nele para definirmos a operação de modo a obter um grupo.

3. Dado um conjunto qualquer X, é possível definir em X uma operação binária $*$ tal que $(X, *)$ é um grupo. V☐ F☒

   O conjunto vazio nunca é grupo.

3. Dado um conjunto finito qualquer X, é possível definir em X uma operação binária $*$ tal que $(X, *)$ é um grupo. V☐ F☒

   O conjunto vazio é finito e nunca é grupo.

---

4. Um subconjunto H de um grupo é um seu subgrupo se $ab^{-1} \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☐ F☒

   Nas condições da afirmação, H pode ser $\emptyset$ e $\emptyset$ nunca é subgrupo de um grupo.

4. Um subconjunto não vazio H de um grupo é um seu subgrupo se $ab^{-1} \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☒ F☐

   Este é o segundo critério de subgrupo.

4. Um subconjunto não vazio H de um grupo é um seu subgrupo se $ab \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☐ F☒

   Basta considerar o subconjunto $\mathbb{N}$ do grupo multiplicativo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Apesar do produto de dois naturais ser um natural, o conjunto não vazio $\mathbb{N}$ não é subgrupo de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, porque os inversos dos números naturais não são naturais.

4. Um subconjunto não vazio H de um grupo é um seu subgrupo se $a^{-1}b^{-1} \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☐ F☒

   No grupo multiplicativo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, considere-se $H = \{2^{1+3k} : k \in \mathbb{Z}\}$. Este conjunto é não vazio e não é grupo porque $1 \notin H$. No entanto, dados $k, k' \in \mathbb{Z}$, temos que $2^{-(1+3k)} \times 2^{-(1+3k')} = 2^{-2+3(-k-k')} = 2^{1+3(-k-k'-1)} \in H$.

---

5. A intersecção de dois subgrupos de um grupo pode ser vazia. V☐ F☒

   Como a identidade de um grupo é um elemento de qualquer subgrupo do grupo, a intersecção tem, no mínimo, a identidade do grupo como elemento.

5. Se G é um grupo e $H, K \subseteq G$ são tais que $H < G$ e $H \cap K < G$ então $K < G$. V☐ F☒

   Basta considerar o grupo de três elementos $G = \{1_G, a, b\}$, $H = \{1_G\}$ e $K = \{1_G, a\}$. Neste caso, $H \cap K = H$ e K não é subgrupo de G pois 2 não é divisor de 3.

5. A união de dois subgrupos de um grupo nunca é um subgrupo desse grupo. V☐ F☒

   Se um dos subgrupos estiver contido no outro, a união é este último e,por isso, é um subgrupo do grupo.

5. Se o produto de dois subgrupos de um grupo G é um subgrupo de G então G é abeliano. V☐ F☒

   Se um dos subgrupos for normal, o produto é subgrupo sem que o G seja abeliano. Basta considerar o grupo não abeliano $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ (exercício 17), $H = \{e, a\}$ e $K = \{e, p, q\}$. Neste exemplo, $HK = G$ é obviamente um subgrupo de G e G não é abeliano.

5. Se G é abeliano então a união de dois subgrupos de G é um subgrupo de G. V☐ F☒

   Basta considerar o grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Este grupo é abeliano, $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ são seus subgrupos e, no entanto, $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ não é subgrupo de $\mathbb{Z}$.

---

6. Um subgrupo de um grupo abeliano é um grupo abeliano. V☒ F☐

   Se G é um grupo, $H < G$ e $ab = ba$, para todos $a, b \in G$, então, também é verdade que $ab = ba$, para todos $a, b \in H$.

6. Um subgrupo não trivial de um grupo não abeliano é um grupo não abeliano. V☐ F☒

1. Basta pensar no grupo não abeliano com 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ e no seu subgrupo $H = \{e, p, q\}$ (exercício 17). Neste caso, G não é abeliano, $H < G$ e H é abeliano.

6. Existem grupos abelianos que admitem subgrupos não abelianos. V☐ F☒

   Se G é um grupo, $H < G$ e $ab = ba$, para todos $a, b \in G$, então, também é verdade que $ab = ba$, para todos $a, b \in H$.

6. Existem grupos não abelianos que admitem subgrupos não triviais abelianos. V☒ F☐

2. Basta pensar no grupo não abeliano com 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ e no seu subgrupo $H = \{e, p, q\}$ (exercício 17). Neste caso, G não é abeliano, $H < G$ e H é abeliano.

---

7. Se H é um subgrupo de um grupo G e $a \in G$ então as classes laterais Ha e aH têm o mesmo número de elementos. V☐ F☒

   A afirmação só é verdadeira se H é finito.

7. Se H é um subgrupo de um grupo G e $a, b \in G$ então as classes laterais aH e Hb são iguais ou disjuntas. V☐ F☒

1. Basta pensar no grupo não abeliano com 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ e no seu subgrupo $H = \{e, a\}$ (exercício 17). Neste caso, $b, c \in G$ e $bH = \{b, q\}$ e $Hc = \{c, q\}$.

7. Se H é um subgrupo de um grupo G e $a, b \in G$ então $aH = bH$ se e só se $ab \in H$. V☐ F☒

   Basta pensar no grupo não abeliano com 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ e no seu subgrupo $H = \{e, a\}$ (exercício 17). Neste caso, $b, c \in G$ e $bH = \{b, q\}$ e $bb = q \notin H$.

7. Qualquer subgrupo de um grupo define classes laterais esquerdas. V☒ F☐

   Se G é grupo e $H < G$, então, para todo $a \in G$, aH é uma classe lateral esquerda módulo H.

7. Um subgrupo H de um grupo é uma classe lateral esquerda módulo H. V☒ F☐

   Se G é grupo e $H < G$, então, $H = 1_G H$, pelo que H é uma classe lateral esquerda módulo H.

---

8. Se G é um grupo finito e $H < G$ então $[G : H] \mid |G|$. V☒ F☐

   Resulta de podermos aplicar o Teorema de Lagrange, uma vez que G é finito: $|G| = |H|[G : H]$.

8. Se G é um grupo e $H < G$ então $|G| = |H|[G : H]$. V☐ F☒

   Se G não for finito, nada podemos concluir, pois não é válido o Teorema de Lagrange.

8. Se G é um grupo abeliano de ordem 18, existe $H < G$ tal que $|H| = 6$. V☒ F☐

   Pelo teorema de Cauchy, uma vez que 2 e 3 são primos divisores de 18, existem elementos $x, y \in G$ tais que $o(x) = 2$ e $o(y) = 3$. Como G é abeliano e $\text{m.d.c.}(2, 3) = 1$, podemos concluir que $xy \in G$ é tal que $o(xy) = \text{m.m.c.}(2, 3) = 6$. (exercício 19).

8. Se G é um grupo de ordem 20 e $H < G$ é tal que $[G : H] = 10$, então, $|H| = 10$. V☐ F☒

Pelo Teorema de Lagrange, se $G = 20$ e $[G : H] = 10$, então, $|H| = 2$.

---

9. Se G é grupo, $H \lhd G$ e $a \in G$, então, $ah = ha$ para todo $h \in H$. V☐ F☒

Basta considerar o grupo não comutativo de 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$, o subgrupo $H = \{e, p, q\}$ de G e o elemento a (ver exemplo 24 dos slides). Temos que $H \lhd G$, $p \in H$ e $ap = b \neq c = pa$.

9. Se G é grupo e $H < G$, então, $H \lhd G$ se e só se $xyx^{-1} \in H$, para todos $x \in H$ e $y \in G$. V☐ F☒

Basta considerar o grupo não comutativo de 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ e o subgrupo $H = \{e, p, q\}$ de G (ver exemplo 24 dos slides). Temos que $H \lhd G$, $e \in H$, $a \in G$ e $eae^{-1} = a \notin H$.

9. Se G é grupo, então, $H \lhd G$ se e só se $xyx^{-1} \in H$, para todos $x \in G$ e $y \in H$. V☐ F☒

Se $H = \emptyset$, a condição "$xyx^{-1} \in H$, para todos $x \in G$ e $y \in H$" é satisfeita e $H \not\lhd G$, pois nem sequer é subgrupo.

9. Se G é grupo e $H < G$, então, $H \lhd G$ se e só se $xyx^{-1}H \subseteq H$, para todos $x \in G$ e $y \in H$. V☒ F☐

A afirmação é o critério de subgrupo normal de um grupo.

---

10. $\mathbb{Z}_3 \lhd \mathbb{Z}_6$. V☐ F☒

O grupo $\mathbb{Z}_3$ não é subgrupo do grupo $\mathbb{Z}_9$ porque $\mathbb{Z}_3 \not\subseteq \mathbb{Z}_9$.

10. $\{[0]_6, [3]_6, [5]_6\} \lhd \mathbb{Z}_6$. V☐ F☒

Basta observar que $[5]_6 + [5]_6 = [10]_6 = [4]_6 \notin \{[0]_6, [3]_6, [5]_6\}$.

10. $\mathbb{Z}_6$ admite um subgrupo que não é normal. V☐ F☒

O grupo $\mathbb{Z}_6$ é abeliano e todos os subgrupos de um grupo abeliano são normais nesse grupo.

10. Todos os subgrupos de $\mathbb{Z}_6$ são normais em $\mathbb{Z}_6$. V☒ F☐

O grupo $\mathbb{Z}_6$ é abeliano e todos os subgrupos de um grupo abeliano são normais nesse grupo.

---

11. Um grupo quociente de um grupo finito é um grupo finito. V☒ F☐

Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Sabendo que $G/H = \{aH : a \in G\}$, se G é finito, G/H tem, no máximo, tantos elementos quantos G.

11. Um grupo quociente de um grupo abeliano é abeliano. V☒, F☐

Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Sabendo que $G/H = \{aH : a \in G\}$ e que, para todos $a, b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, é óbvio que

$$(aH)(bH) = (bH)(aH) \Leftrightarrow ab = ba, \ \forall a, b \in G.$$

11. Um grupo quociente de um grupo não abeliano é não abeliano. V☐ F☒

Basta considerar o grupo não comutativo de 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ e o subgrupo $H = \{e, p, q\}$ de G (ver exemplo 24 dos slides). Tendo apenas dois elementos, o grupo $G/H = \{H, \{a, b, c\}\}$ é obviamente abeliano.

11. Um grupo quociente de um grupo infinito é um grupo infinito. V☐ F☒

    Basta considerar o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ e o seu subgrupo (normal) $2\mathbb{Z}$. Temos que $\mathbb{Z}$ é infinito e que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ é finito.

11. Existem grupos quociente de grupos infinitos que são também grupos infinitos. V☒ F☐

    Basta considerar o grupo aditivo $\mathbb{R}$ e o seu subgrupo (normal) $\mathbb{Z}$. Temos que $\mathbb{R}$ é infinito e que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{a + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{R}\}$ é infinito.

---

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ não tem elementos de ordem 2. V☐ F☒

    Temos que $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é tal que $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ e que $2(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) = 1 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. Logo, $o(\frac{}{2} + \mathbb{Z}) = 2$.

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem elementos de ordem 2. V☒ F☐

    Temos que $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é tal que $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ e que $2(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) = 1 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. Logo, $o(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) = 2$.

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem elementos de ordem n, para todo $n \in \mathbb{N}$. V☒ F☐

    Temos que $\frac{1}{n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é tal que $n(\frac{1}{n} + \mathbb{Z}) = 1 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ e que se $k(\frac{1}{n} + \mathbb{Z}) = \frac{k}{n} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$, então, $n \mid k$. Logo, $o(\frac{1}{n} + \mathbb{Z}) = n$.

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem elementos de ordem 4. V☒ F☐

    Temos que $\frac{1}{4} + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é tal que $4(\frac{1}{4} + \mathbb{Z}) = 1 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ e que se $k(\frac{1}{4} + \mathbb{Z}) = \frac{k}{4} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$, então, $4 \mid k$. Logo, $o(\frac{1}{4} + \mathbb{Z}) = 4$.

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem elementos de ordem 10. V☒ F☐

    Temos que $\frac{1}{10} + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é tal que $10(\frac{1}{10} + \mathbb{Z}) = 1 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ e que se $k(\frac{1}{10} + \mathbb{Z}) = \frac{k}{10} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 1_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$, então, $10 \mid k$. Logo, $o(\frac{1}{10} + \mathbb{Z}) = 10$.

---

13. Se $\varphi : G \to G'$ é um morfismo de grupos então, para todos $a, b \in G$, $\varphi((ab)^{-1}) = [\varphi(b)]^{-1}\varphi(a^{-1})$. V☒ F☐

    $\varphi((ab)^{-1}) = \varphi(b^{-1}a^{-1}) = [\varphi(b)]^{-1}\varphi(a^{-1})$

13. Se $\varphi : G \to G'$ é um epimorfismo de grupos então $\mathrm{Nuc}\varphi \lhd G'$. V☐ F☒

    $\mathrm{Nuc}\varphi \lhd G$ e G' pode não ser igual a G.

13. Se $\varphi : G \to G'$ é um morfismo de grupos e $H \lhd G$ então $\varphi(H) \lhd G'$. V☐ F☒

    Para ser verdade, φ tem de ser epimorfismo.

13. Se $\varphi : G \to G'$ é um morfismo de grupos e $a \in G$ então $\varphi(< a >) =< \varphi(a) >$. V☒ F☐

    Resulta de termos $\varphi(a^n) = a(\varphi(a))^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ (ver exercício 38(a)).

---

14. Dois grupos finitos isomorfos têm a mesma ordem. V☒ F☐

    Se os dois grupos são isomorfos então existe uma aplicação bijetiva entre eles. Assim, como os dois grupos são finitos, têm de ter o mesmo número de elementos.

14. Dois grupos finitos com a mesma ordem são isomorfos. V☐ F☒

    Basta considerar os grupos $\mathbb{Z}_4$ e o grupo 4-Klein. Têm ambos 4 elementos e não são isomorfos.

14. $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_8$. V☐ F☒

O grupo $\mathbb{Z}_8$ é cíclico, pelo que o isomorfismo referido só existe se $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$ for também cíclico, isto é, se $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$ tiver um elemento de ordem 8. Sabemos que se $(x, y) \in \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$, $o((x, y)) = \text{m.m.c.}(o(x), o(y))$. Como $o(x) \in \{1, 2\}$ e $o(y) \in \{1, 2, 4\}$, $o((x, y)) \in \{1, 2, 4\}$.

14. Se G, H e K são grupos tais que $G \simeq H$ e $H \simeq K$ então $G \simeq K$. V☒ F☐

Sabemos que a composta de duas aplicações bijetivas é uma aplicação bijetiva e a composta de morfismos é um morfismo. Assim, se $f : G \to H$ e $g : H \to K$ são dois isomorfismos de grupo, então, $g \circ f : G \to K$ é um isomorfismo de grupo.

---

15. Dois elementos de um grupo G com a mesma ordem geram o mesmo subgrupo de G. V☐ F☒

Basta considerar o grupo não comutativo de 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ e os elementos a e b. Neste caso, $o(a) = 2 = o(b)$ e $< a >= \{e, a\} \neq \{e, b\} =< b >$.

15. Os subgrupos gerados por dois elementos de um grupo finito G com a mesma ordem são isomorfos. V☒ F☐

Os dois elementos com a mesma ordem têm de ter ordem finita, uma vez que G tem ordem finita. Assim, os subgrupos gerados pelos dois elementos têm a mesma ordem finita. Como os subgrupos gerados são grupos cíclicos e grupos cíclicos finitos com a mesma ordem são isomorfos, concluímos que os dois subgrupos são isomorfos.

15. Se G é grupo e $a, b \in G$ são tais que $b \in < a >$ então $a \in < b >$. V☐ F☒

Basta considerar um grupo G com pelo menos dois elementos e $a \in G \backslash \{1_G\}$. Em G, temos que $1_G \in < a >$ e $a \notin < 1_G >= \{1_G\}$.

15. Se G é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $b \in < a >$, então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = b^n$. V☐ F☒

Basta considerar um grupo G com pelo menos dois elementos e $a \in G \backslash \{1_G\}$. Em G, temos que $1_G \in < a >$ e $a \notin < 1_G >= \{1_G\} = \{1_G^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

---

16. Se G é um grupo cíclico e $H < G$ então H é um grupo cíclico. V☒ F☐

Todo o subgrupo de um grupo cíclico é cíclico.

16. Se G é um grupo e $H < G$ é cíclico então G é cíclico. V☐ F☒

Basta considerar o grupo não comutativo de 6 elementos $G = \{e, p, q, a, b, c\}$, que não é cíclico e o subgrupo $H = \{e, a\} =< a >$.

16. Se G é um grupo cíclico e $a, b \in G$ então $< \{a, b\} >$ é um grupo cíclico. V☒ F☐

Todo o subgrupo de um grupo cíclico é cíclico.

16. Existem grupos cíclicos G que admitem subgrupos que não são cíclicos. V☐ F☒

Todo o subgrupo de um grupo cíclico é cíclico.

---

17. O produto direto de dois grupos cíclicos é um grupo cíclico. V☐ F☒

Basta considerar $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$ que não é cíclico. (ver questão 14.)

17. Sejam G e H dois grupos cíclicos. Então, o produto direto $G \otimes H$ é um grupo cíclico. V☐ F☒

Basta considerar $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$ que não é cíclico. (ver questão 14.)

17. $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_7$ é um grupo cíclico. V☒ F☐

$\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_7$ tem 35 elementos e $o(([1]_5, [1]_7)) = \text{m.m.c.}(5, 7) = 35$. Logo, $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_7 = \langle([1]_5, [1]_7)\rangle$

17. $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ é um grupo cíclico. V☐ F☒

O grupo $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ é cíclico se tiver um elemento de ordem 24, que é a ordem do grupo. Sabemos que se $(x, y) \in \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$, $o((x, y)) = \text{m.m.c.}(o(x), o(y))$. Como $o(x) \in \{1, 2, 4\}$ e $o(y) \in \{1, 2, 3, 6\}$, $o((x, y)) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Logo, este grupo não tem qualquer elemento de ordem 24.

17. $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_9$ é um grupo cíclico. V☒ F☐

$\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_9$ tem 36 elementos e $o(([1]_4, [1]_9)) = \text{m.m.c.}(4, 9) = 36$. Logo, $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_9 = \langle([1]_4, [1]_9)\rangle$

Em cada uma das questões seguintes, assinale a(s) opção(ões) correta(s):

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1, 0)) = 12$ e $\varphi((0, 1)) = 30$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

☒ $n = 6$ ☐ $n = 60$ ☐ $n = 18$ ☐ $n = 3$

Como $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, temos que $\varphi((x, y)) = 12x + 30y$, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) &= \{\varphi((x, y)) : x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{12x + 3y : x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \text{m.d.c.}(12, 30)\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1, 0)) = 20$ e $\varphi((0, 1)) = 12$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

☐ $n = 2$ ☒ $n = 4$ ☐ $n = 60$ ☐ $n = 8$

Como $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, temos que $\varphi((x, y)) = 20x + 12y$, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) &= \{\varphi((x, y)) : x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{20x + 12y : x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \text{m.d.c.}(20, 12)\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1, 0)) = 30$ e $\varphi((0, 1)) = 20$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

☒ $n = 10$ ☐ $n = 5$ ☐ $n = 20$ ☐ $n = 60$

Como $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, temos que $\varphi((x, y)) = 30x + 20y$, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) &= \{\varphi((x, y)) : x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{30x + 20y : x, y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \text{m.d.c.}(30, 20)\mathbb{Z} = 10\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1, 0)) = 15$ e $\varphi((0, 1)) = 28$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

☒ $n = 1$ ☐ $n = 13$ ☐ $n = 43$ ☐ $n = 15$

Como $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$, temos que $\varphi((x,y))=15x+28y$, para todos $x,y\in\mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}) &= \{\varphi((x,y)) : x,y\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{15x+28y : x,y\in\mathbb{Z}\}\\ &= \text{m.d.c.}(15,28)\mathbb{Z}=1\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

---

19. Seja G um grupo cíclico de ordem 27. O número de geradores de G é

☒ 18 ☐ 4 ☐ 27 ☐ 1

Se $G=<x>$ é um grupo de ordem $n\in\mathbb{N}$, sabemos que $G=<x^r>$ se e só se $\text{m.d.c.}(r,n)=1$ (ver exercício 43). O número de números r que satisfazem esta condição é dado pelo valor da função de Euler de n. Neste caso, sendo $n=27=3^3$, o número de geradores é $\varphi(27)=27(1-\frac{1}{3})=27\times\frac{2}{3}=18$.

19. Seja G um grupo cíclico de ordem 27. O número de automorfismos em G é

☐ 27 ☐ 4 ☒ 18 ☐ 1

Se $G=<x>$ é um grupo de ordem $n\in\mathbb{N}$, sabemos que $f(x)=x^r$ define um automorfismo em G se e só se $G=<x^r>$, ou seja, se e só se $\text{m.d.c.}(r,n)=1$ (ver exercício 43). O número de números r que satisfazem esta condição é dado pelo valor da função de Euler de n. Neste caso, sendo $n=27=3^3$, o número de geradores é $\varphi(27)=27(1-\frac{1}{3})=27\times\frac{2}{3}=18$.

19. Seja G um grupo cíclico de ordem 27. O número de subgrupos de G é

☐ 18 ☒ 4 ☐ 27 ☐ 1

Se $G=<x>$ é um grupo de ordem $n\in\mathbb{N}$, sabemos que o número de subgrupos de G é exatamente o número de divisores de n (ver exercício 43). Neste caso, sendo $n=27=3^3$, o número de subgrupos é 4, uma vez que os divisores de 27 são 1, 3, 9 e 27.

19. Seja G um grupo cíclico de ordem 27. O número de subgrupos cíclicos de G é

☐ 18 ☐ 13 ☐ 27 ☒ 4

Se G é cíclico, qualquer subgrupo de G é também cíclico. Se $G=<x>$ é um grupo de ordem $n\in\mathbb{N}$, sabemos que o número de subgrupos de G é exatamente o número de divisores de n (ver exercício 43). Neste caso, sendo $n=27=3^3$, o número de subgrupos cíclicos é 4, uma vez que os divisores de 27 são 1, 3, 9 e 27.

---

20. Sejam G um grupo, $K<G$ e $H\lhd G$. Podemos concluir que:

☐ $\forall h\in H, \forall k\in K,\ hk=kh$ ☐ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists k'\in K : hk=k'h$
☒ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists h'\in H : kh=h'k$ ☒ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists h'\in H : hk=kh'$

20. Sejam G um grupo, $K,H\lhd G$. Podemos concluir que:

☐ $\forall h\in H, \forall k\in K,\ hk=kh$ ☒ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists k'\in K : hk=k'h$
☒ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists h'\in H : kh=h'k$ ☒ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists h'\in H : hk=kh'$

20. Sejam G um grupo, $H<G$ e $K\lhd G$. Podemos concluir que:

☐ $\forall h\in H, \forall k\in K,\ hk=kh$ ☒ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists k'\in K : hk=k'h$
☐ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists h'\in H : kh=h'k$ ☐ $\forall h\in H, \forall k\in K, \exists h'\in H : hk=kh'$

20. Sejam G um grupo, $K < G$ e $H \lhd G$. Podemos concluir que:

☐ $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$ ☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists k' \in K:\ hk = k'h$
☒ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H:\ kh = h'k$ ☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists k' \in K:\ kh = hk'$

Se $H \lhd G$, então, para todo $g \in G$, $gH = Hg$. Em particular, para todo $k \in K$, $kH = Hk$. Assim, porque $kh \in kH = Hk$, podemos concluir que existe $h' \in H$ tal que $kh = h'k$. De igual modo, como $hk \in Hk = kH$, podemos concluir que existe $h' \in H$ tal que $hk = kh'$.

Se $K \lhd G$, então, para todo $g \in G$, $gK = Kg$. Em particular, para todo $h \in H$, $hK = Kh$. Assim, porque $hk \in hK = Kh$, podemos concluir que existe $k' \in K$ tal que $hk = k'h$. De igual modo, como $kh \in Kh = hK$, podemos concluir que existe $k' \in K$ tal que $kh = hk'$.

---

21. Seja $G = \mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_8$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 8$, então podemos ter

☐ $H = \mathbb{Z}_8$ ☒ $H =< ([6]_{12}, [7]_8) >$ ☐ $H =< ([2]_{12}, [4]_8) >$ ☒ $H =< ([3]_{12}, [3]_8) >$

$\mathbb{Z}_8 \not\subseteq G$, pelo que $\mathbb{Z}_8 \not< G$. Todas as outras opções apresentam subgrupos gerados por elementos de G e, por isso, subgrupos de G. As opções corretas correspondem àquelas em que esses elementos têm ordem 8. Como, em $\mathbb{Z}_{12}$, $o([6]_{12}) = 2$, $o([2]_{12}) = 6$ e $o([3]_{12}) = 4$ e, em $\mathbb{Z}_8$, $o([7]_8) = 8$, $o([4]_8) = 2$ e $o([3]_8) = 8$, temos que, em $\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_8$, $o(([6]_{12}, [7]_8)) = \text{m.m.c.}(2, 8) = 8$, $o(([2]_{12}, [4]_8)) = \text{m.m.c.}(4, 2) = 4$ e $o(([3]_{12}, [3]_8)) = \text{m.m.c.}(4, 8) = 8$.

21. Seja $G = \mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_8$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 8$, então podemos ter

☐ $H =< ([2]_{12}, [4]_8) >$ ☒ $H =< ([6]_{12}, [3]_8) >$ ☒ $H =< ([0]_{12}, [5]_8) >$ ☐ $H = \mathbb{Z}_8$

$\mathbb{Z}_8 \not\subseteq G$, pelo que $\mathbb{Z}_8 \not< G$. Todas as outras opções apresentam subgrupos gerados por elementos de G e, por isso, subgrupos de G. As opções corretas correspondem àquelas em que esses elementos têm ordem 8. Como, em $\mathbb{Z}_{12}$, $o([2]_{12}) = 6$, $o([6]_{12}) = 2$ e $o([0]_{12}) = 1$ e, em $\mathbb{Z}_8$, $o([4]_8) = 2$, $o([3]_8) = 8$ e $o([5]_8) = 8$, temos que, em $\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_8$, $o(([2]_{12}, [4]_8)) = \text{m.m.c.}(4, 2) = 4$, $o(([6]_{12}, [3]_8)) = \text{m.m.c.}(2, 8) = 8$ e $o(([0]_{12}, [5]_8)) = \text{m.m.c.}(1, 8) = 8$.

21. Seja $G = \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15}$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 10$, então podemos ter

☐ $H = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_5$ ☐ $H =< ([2]_6, [5]_{15}) >$ ☒ $H =< ([3]_6, [9]_{15}) >$ ☒ $H =< ([3]_6, [3]_{15}) >$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \not\subseteq G$, pelo que $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_5 \not< G$. Todas as outras opções apresentam subgrupos gerados por elementos de G e, por isso, subgrupos de G. As opções corretas correspondem àquelas em que esses elementos têm ordem 10. Como, em $\mathbb{Z}_6$, $o([2]_6) = 3$, $o([3]_6) = 2$ e, em $\mathbb{Z}_{15}$, $o([5]_{15}) = 3$, $o([9]_{15}) = 5$ e $o([3]_{15}) = 5$, temos que, em $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15}$, $o(([2]_6, [5]_{15})) = \text{m.m.c.}(3, 3) = 3$, $o(([3]_6, [9]_{15})) = \text{m.m.c.}(2, 5) = 10$ e $o(([3]_6, [3]_{15})) = \text{m.m.c.}(2, 5) = 10$.

21. Seja $G = \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15}$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 10$, então podemos ter

☒ $H =< ([3]_6, [3]_{15}) >$ ☐ $H = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_5$ ☐ $H =< ([5]_6, [2]_{15}) >$ ☒ $H =< ([3]_6, [6]_{15}) >$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \not\subseteq G$, pelo que $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_5 \not< G$. Todas as outras opções apresentam subgrupos gerados por elementos de G e, por isso, subgrupos de G. As opções corretas correspondem àquelas em que esses elementos têm ordem 10. Como, em $\mathbb{Z}_6$, $o([3]_6) = 2$ e $o([5]_6) = 6$ e, em $\mathbb{Z}_{15}$, $o([3]_{15}) = 5$, $o([2]_{15}) = 15$ e $o([6]_{15}) = 5$, temos que, em $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15}$, $o(([3]_6, [3]_{15})) = \text{m.m.c.}(2, 5) = 10$, $o(([5]_6, [2]_{15})) = \text{m.m.c.}(6, 15) = 30$ e $o(([3]_6, [6]_{15})) = \text{m.m.c.}(2, 5) = 10$.

---

22. Sejam G um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{12} = 1_G$. Então,

☒ $a^{24} = 1_G$ ☒ $a^5 \neq 1_G$ ☐ $a^7 = 1_G$ ☐ $a^3 = 1_G$

Se $a^{12} = 1_G$, então, $a^{24} = (a^{12})^2 = 1_G$. Se $a^5 = 1_G$, então, $a^1 = a^{25-24} = (a^5)^5(a^{12})^{-1} = 1_G$. Logo, $a^5 \neq 1_G$. Se $a^7 = 1_G$, então, $a^1 = a^{36-35} = (a^7)^{-5}(a^{12})^3 = 1_G$. Finalmente, de $a \neq 1_G$ e $a^{12} = 1_G$, temos que $o(a) \in 2, 3, 4, 6, 12$. Logo, $a^3 = 1_G$ se $o(a) = 3$ e $a^3 \neq 1_G$ nos restantes casos.

22. Sejam G um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{18} = 1_G$. Então,

☐ $a^1 = 1_G$ ☒ $a^7 \neq 1_G$ ☒ $a^{36} = 1_G$ ☐ $a^3 = 1_G$

Como $a \neq 1_G$, temos que $a^1 \neq 1_G$. Se $a^{18} = 1_G$ e $a^7 = 1_G$, então, $a^1 = a^{36-35} = (a^7)^{-5}(a^{18})^2 = 1_G$. Se $a^{18} = 1_G$, então, $a^{36} = (a^{18})^2 = 1_G$. Finalmente, de $a \neq 1_G$ e $a^{18} = 1_G$, temos que $o(a) \in \{2, 3, 6, 9, 18\}$. Logo, $a^3 = 1_G$ se $o(a) = 3$ e $a^3 \neq 1_G$ nos restantes casos.

22. Sejam G um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{12} = 1_G$. Então,

☒ $a^{36} = 1_G$ ☐ $a^8 \neq 1_G$ ☐ $a^{13} = 1_G$ ☐ $a^3 \neq 1_G$

Se $a^{12} = 1_G$, então, $a^{36} = (a^{12})^3 = 1_G$. Se $a^{13} = 1_G$, então, $a^1 = a^{13-12} = a^{13}(a^{12})^{-1} = 1_G$. Finalmente, de $a \neq 1_G$ e $a^{12} = 1_G$, temos que $o(a) \in 2, 3, 4, 6, 12$. Logo, $a^8 = 1_G$ se $o(a) = 4$ ou $o(a) = 2$ e $a^8 \neq 1_G$ nos restantes casos, e $a^3 = 1_G$ se $o(a) = 3$ ou $o(a) = 1$ e $a^3 \neq 1_G$ nos restantes casos.

22. Sejam G um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{18} = 1_G$. Então,

☐ $a^9 = 1_G$ ☐ $a^{24} \neq 1_G$ ☒ $a^{17} \neq 1_G$ ☐ $a^3 = 1_G$

Se $a^{18} = 1_G$ e $a^{17} = 1_G$, então, $a^1 = a^{18-17} = a^{18}(a^{17})^{-1} = 1_G$. Logo, $a^{17} \neq 1_G$. De $a \neq 1_G$ e $a^{18} = 1_G$, temos que $o(a) \in \{2, 3, 6, 9, 18\}$. Logo, $a^9 = 1_G$ se $o(a) = 9$ ou $o(a) = 3$ e $a^9 \neq 1_G$ nos restantes casos, $a^{24} = 1_G$ se $o(a) = 2$, $o(a) = 3$ ou $o(a) = 6$, e $a^{24} \neq 1_G$ nos restantes casos, e, finalmente, $a^3 = 1_G$ se $o(a) = 3$ e $a^3 \neq 1_G$ nos restantes casos.

---

23. Sejam G um grupo não abeliano de ordem 10 e $a \in G$. Então,

☒ $o(a) \in \{1, 2, 5\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 2, 5, 10\}$ ☐ $o(a) \in \{2, 5\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 2\}$

Se $|G = 10|$ e $a \in G$, então, $o(a) \mid 10$. Se $o(a) = 10$, então, $G =< a >$ e, portanto, G seria abeliano, uma vez que seria um grupo cíclico. Logo, $a \in \{1, 2, 5\}$.

23. Sejam G um grupo não abeliano de ordem 15 e $a \in G$. Então,

☐ $o(a) \in \{1, 3\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 3, 5, 15\}$ ☐ $o(a) \in \{3, 5\}$ ☒ $o(a) \in \{1, 3, 5\}$

Se $|G = 15|$ e $a \in G$, então, $o(a) \mid 15$. Se $o(a) = 15$, então, $G =< a >$ e, portanto, G seria abeliano, uma vez que seria um grupo cíclico. Logo, $a \in \{1, 3, 5\}$.

23. Sejam G um grupo não abeliano de ordem 14 e $a \in G$. Então,

☐ $o(a) \in \{1, 2\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 2, 7, 14\}$ ☒ $o(a) \in= \{1, 2, 7\}$ ☐ $o(a) \in \{2, 7\}$

Se $|G = 14|$ e $a \in G$, então, $o(a) \mid 14$. Se $o(a) = 14$, então, $G =< a >$ e, portanto, G seria abeliano, uma vez que seria um grupo cíclico. Logo, $a \in \{1, 2, 7\}$.

23. Sejam G um grupo não abeliano de ordem 21 e $a \in G$. Então,

☐ $o(a) \in \{1, 7\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 3, 7, 21\}$ ☐ $o(a) \in \{3, 7\}$ ☒ $o(a) \in \{1, 3, 7\}$

Se $|G = 21|$ e $a \in G$, então, $o(a) \mid 21$. Se $o(a) = 21$, então, $G =< a >$ e, portanto, G seria abeliano, uma vez que seria um grupo cíclico. Logo, $a \in \{1, 3, 7\}$.

Observação: A opção que considera o conjunto com 4 elementos só será opção correta se a opção identificada anteriormente como a correta também for selecionada, uma vez que assinalar o conjunto com 4 elementos e não assinalar o conjunto com 3 elementos é o mesmo que dizer que a ordem de a tem de ser igual à ordem do grupo.

---

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos finitos.

☐ $|G| = 5 \Rightarrow |G'| = 5$ ☐ $|G'| = 5 \Rightarrow |G| = 5$

☒ $|G| = 5 \Rightarrow 5 \mid |G'|$ ☒ $|G'| = 5 \Rightarrow 5 \mid |G|$

Se $|G| = 5$, $G =< x >$, para algum $x \in G$ e, por isso, $\varphi(G) =< \varphi(x) >$. Sabemos que $o(\varphi(x)) \mid o(x)$ e que φ não é o morfismo nulo, pelo que $|\varphi(G)| = o(\varphi(x)) = 5$. Como $\varphi(G) < G'$ e G' é finito, temos que $5 \mid |G'|$.

Se $|G'| = 5$, $G' =< x >$, para algum $x \in G$ e, por isso, $\varphi(G) < G'$ também é cíclico. Logo, $\varphi(G) =< \varphi(a) >$, para algum $a \in G$. Sabemos que φ não é o morfismo nulo, pelo que $|\varphi(G)| = o(\varphi(a)) = 5$. Como G é finito, $o(a)$ é finita e, por isso, $o(\varphi(a)) \mid o(a)$. Sabemos ainda que $o(a) \mid |G|$. Logo, temos que $5 \mid |G|$.

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos finitos.

☐ $|G| = 7 \Rightarrow |G'| = 7$ ☒ $|G| = 7 \Rightarrow 7 \mid |G'|$

☐ $|G'| = 7 \Rightarrow |G| = 7$ ☒ $|G'| = 7 \Rightarrow 7 \mid |G|$

Se $|G| = 7$, $G =< x >$, para algum $x \in G$ e, por isso, $\varphi(G) =< \varphi(x) >$. Sabemos que $o(\varphi(x)) \mid o(x)$ e que φ não é o morfismo nulo, pelo que $|\varphi(G)| = o(\varphi(x)) = 7$. Como $\varphi(G) < G'$ e G' é finito, temos que $7 \mid |G'|$.

Se $|G'| = 7$, $G' =< x >$, para algum $x \in G$ e, por isso, $\varphi(G) < G'$ também é cíclico. Logo, $\varphi(G) =< \varphi(a) >$, para algum $a \in G$. Sabemos que φ não é o morfismo nulo, pelo que $|\varphi(G)| = o(\varphi(a)) = 7$. Como G é finito, $o(a)$ é finita e, por isso, $o(\varphi(a)) \mid o(a)$. Sabemos ainda que $o(a) \mid |G|$. Logo, temos que $7 \mid |G|$.

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos finitos.

☒ $|G'| = 11 \Rightarrow 11 \mid |G|$ ☐ $|G'| = 11 \Rightarrow |G| = 11$

☒ $|G| = 11 \Rightarrow 11 \mid |G'|$ ☐ $|G| = 11 \Rightarrow |G'| = 11$

Se $|G| = 11$, $G =< x >$, para algum $x \in G$ e, por isso, $\varphi(G) =< \varphi(x) >$. Sabemos que $o(\varphi(x)) \mid o(x)$ e que φ não é o morfismo nulo, pelo que $|\varphi(G)| = o(\varphi(x)) = 11$. Como $\varphi(G) < G'$ e G' é finito, temos que $11 \mid |G'|$.

Se $|G'| = 11$, $G' =< x >$, para algum $x \in G$ e, por isso, $\varphi(G) < G'$ também é cíclico. Logo, $\varphi(G) =< \varphi(a) >$, para algum $a \in G$. Sabemos que φ não é o morfismo nulo, pelo que $|\varphi(G)| = o(\varphi(a)) = 11$. Como G é finito, $o(a)$ é finita e, por isso, $o(\varphi(a)) \mid o(a)$. Sabemos ainda que $o(a) \mid |G|$. Logo, temos que $11 \mid |G|$.

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos finitos.

☒ $|G| = 13 \Rightarrow 13 \mid |G'|$ ☒ $|G'| = 13 \Rightarrow 13 \mid |G|$

☐ $|G| = 13 \Rightarrow |G'| = 13$ ☐ $|G'| = 13 \Rightarrow |G| = 13$

Se $|G| = 13$, $G =< x >$, para algum $x \in G$ e, por isso, $\varphi(G) =< \varphi(x) >$. Sabemos que $o(\varphi(x)) \mid o(x)$ e que φ não é o morfismo nulo, pelo que $|\varphi(G)| = o(\varphi(x)) = 13$. Como $\varphi(G) < G'$ e G' é finito, temos que $13 \mid |G'|$.

Se $|G'| = 13$, $G' =< x >$, para algum $x \in G$ e, por isso, $\varphi(G) < G'$ também é cíclico. Logo, $\varphi(G) =< \varphi(a) >$, para algum $a \in G$. Sabemos que φ não é o morfismo nulo, pelo que $|\varphi(G)| = o(\varphi(a)) = 13$. Como G é finito, $o(a)$ é finita e, por isso, $o(\varphi(a)) \mid o(a)$. Sabemos ainda que $o(a) \mid |G|$. Logo, temos que $13 \mid |G|$.

---

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{12}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [9n]_{12}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 12\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_4$

Como

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Nuc}\varphi \quad & \Leftrightarrow \varphi(x) = [0]_{12} \\ & \Leftrightarrow [9n]_{12} = [0]_{12} \Leftrightarrow 12 \mid 9n \Leftrightarrow 4 \mid 3n \\ & \Leftrightarrow 4 \mid n, \end{aligned}$$

concluímos que $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$.

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{18}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [15n]_{18}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 6\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 5\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_6$

Como

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Nuc}\varphi \quad & \Leftrightarrow \varphi(x) = [0]_{18} \\ & \Leftrightarrow [15n]_{18} = [0]_{18} \Leftrightarrow 18 \mid 15n \Leftrightarrow 6 \mid 5n \\ & \Leftrightarrow 6 \mid n, \end{aligned}$$

concluímos que $\mathrm{Nuc}\varphi = 6\mathbb{Z}$.

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{12}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [8n]_{12}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 3\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_3$

Como

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Nuc}\varphi \quad & \Leftrightarrow \varphi(x) = [0]_{12} \\ & \Leftrightarrow [8n]_{12} = [0]_{12} \Leftrightarrow 12 \mid 8n \Leftrightarrow 3 \mid 2n \\ & \Leftrightarrow 3 \mid n, \end{aligned}$$

concluímos que $\mathrm{Nuc}\varphi = 3\mathbb{Z}$.

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{18}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [10n]_{18}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 9\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_9$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 5\mathbb{Z}$

Como

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Nuc}\varphi \quad & \Leftrightarrow \varphi(x) = [0]_{18} \\ & \Leftrightarrow [10n]_{18} = [0]_{18} \Leftrightarrow 18 \mid 10n \Leftrightarrow 9 \mid 5n \\ & \Leftrightarrow 9 \mid n, \end{aligned}$$

concluímos que $\mathrm{Nuc}\varphi = 9\mathbb{Z}$.
