Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Álgebra | 1º teste – 5 dez 2020

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano | duração: duas horas

Nome ______________________________

Curso ______________________ Número ______________

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas não têm qualquer penalização.

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Sejam $(S, *)$ um grupóide e $a, b \in G$ tais que $a * b \neq b * a$. Então, $(S, *)$ é um grupóide não comutativo. V☐ F☐
2. Se G é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a^2 \neq b^2$ então $a \neq b$. V☐ F☐
3. Dado um conjunto finito não vazio qualquer X, é possível definir em X uma operação binária $*$ tal que $(X, *)$ é um grupo. V☐ F☐
4. Um subconjunto H de um grupo é um seu subgrupo se $ab^{-1} \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☐ F☐
5. A união de dois subgrupos de um grupo nunca é um subgrupo desse grupo. V☐ F☐
6. Existem grupos não abelianos que admitem subgrupos não triviais abelianos. V☐ F☐
7. Um subgrupo H de um grupo é uma classe lateral esquerda módulo H. V☐ F☐
8. Se G é um grupo de ordem 20 e $H < G$ é tal que $[G : H] = 10$, então, $|H| = 10$. V☐ F☐
9. Se G é grupo, então, $H \lhd G$ se e só se $xyx^{-1} \in H$, para todo $x \in G$ e $y \in H$. V☐ F☐
10. $\mathbb{Z}_6$ admite um subgrupo que não é normal. V☐ F☐
11. Um grupo quociente de um grupo não abeliano é não abeliano. V☐ F☐
12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ não tem elementos de ordem 2. V☐ F☐
13. Se $\varphi : G \to G'$ é um morfismo de grupos e $H \lhd G$ então $\varphi(H) \lhd G'$. V☐ F☐
14. $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_8$. V☐ F☐
15. Se G é grupo e $a, b \in G$ são tais que $b \in < a >$ então $a \in < b >$. V☐ F☐
16. Se G é um grupo e $H < G$ é cíclico então G é cíclico. V☐ F☐
17. $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_9$ é um grupo cíclico. V☐ F☐

v.s.f.f. $\longrightarrow$

Em cada uma das questões seguintes, assinale a(s) opção(ões) correta(s):

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1,0)) = 15$ e $\varphi((0,1)) = 28$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

    ☐ $n = 1$ ☐ $n = 13$ ☐ $n = 43$ ☐ $n = 15$

19. Seja G um grupo cíclico de ordem 27. O número de subgrupos cíclicos de G é

    ☐ 18 ☐ 13 ☐ 27 ☐ 4

20. Sejam G um grupo, $K, H \lhd G$. Podemos concluir que:

    ☐ $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$ ☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists k' \in K : hk = k'h$
    ☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : kh = h'k$ ☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : hk = kh'$

21. Seja $G = \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15}$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 10$, então podemos ter

    ☐ $H =< ([3]_6, [3]_{15}) >$ ☐ $H = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_5$ ☐ $H =< ([5]_6, [2]_{15}) >$ ☐ $H =< ([3]_6, [6]_{15}) >$

22. Sejam G um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{12} = 1_G$. Então,

    ☐ $a^{36} = 1_G$ ☐ $a^8 \neq 1_G$ ☐ $a^{13} = 1_G$ ☐ $a^3 \neq 1_G$

23. Sejam G um grupo não abeliano de ordem 21 e $a \in G$. Então,

    ☐ $o(a) \in \{1, 7\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 3, 7, 21\}$ ☐ $o(a) = \{3, 7\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 3, 7\}$

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos.

    ☐ $|G| = 7 \Rightarrow |G'| = 7$ ☐ $|G| = 7 \Rightarrow 7 \mid |G'|$
    ☐ $|G'| = 7 \Rightarrow |G| = 7$ ☐ $|G'| = 7 \Rightarrow 7 \mid |G|$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{18}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [15n]_{18}$. Então,

    ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 6\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 5\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_6$