Departamento de Matemática e Aplicações — Universidade do Minho

Álgebra — 1º teste - 14 nov 2018

Licenciatura em Ciências de Computação - 2º ano — duração: duas horas

1. Considere o semigrupo $(\mathbb{Z}_6, \times)$, os grupos $(\mathbb{Z}_7^*, \times)$, onde $\mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7 \backslash \{[0]_7\}$, $(\mathbb{Z}_8, +)$ e o produto direto $(\mathbb{Z}_7^*, \times) \otimes (\mathbb{Z}_8, +)$.

   (a) Indique, **sem justificar**:
   (i) a identidade de $\mathbb{Z}_7^* \otimes \mathbb{Z}_8$; (ii) o inverso do elemento $([3]_7, [2]_8)$;
   (iii) o elemento $([4]_7, [3]_8)\,([2]_7, [4]_8)^{-1}$; (iv) a ordem dos elementos $([2]_7, [4]_8)$ e $([6]_7, [1]_8)$.

   (b) Considere agora o produto direto $(\mathbb{Z}_8, +) \otimes (\mathbb{Z}, +)$ e o morfismo $\theta : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_8, +) \otimes (\mathbb{Z}, +)$ definido por $\theta(n) = ([n]_8, n)$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.
   (i) Calcule $\theta(-58)$, $\theta^{\leftarrow}(([5]_8, 13))$ e $\theta^{\leftarrow}(([3]_8, 0))$.
   (ii) Determine $\mathrm{Nuc}\,\theta$ e justifique se θ é um monomorfismo.
   (iii) Diga, justificando, se o morfismo θ é sobrejetivo.

   (c) Determine, caso existam, $[a]_6, [b]_6 \in \mathbb{Z}_6$, com $[a]_6 \neq [0]_6$, de tal modo que a equação $[a]_6\,[x]_6 = [b]_6$
   (i) não tenha solução em $\mathbb{Z}_6$;
   (ii) tenha pelo menos uma solução em $\mathbb{Z}_6$.

2. Seja $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Considere em G a operação binária $*$ definida por $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$, para quaisquer $(a, b), (c, d) \in G$.

   (a) Sabendo que a operação $*$ é associativa, mostre que $(G, *)$ é um grupo não abeliano.

   (b) Sendo $K = \{(a, b) \in G : b = 1\}$, mostre que $(K, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$.

   (c) i. Determine os elementos de G que têm ordem 2.
   ii. Os elementos de G com ordem 2 formam um sugbrupo de G? Porquê?

3. Sejam G um grupo de ordem 42 e $b \in G \setminus \{1_G\}$ tal que $b^{85} = b^{134}$.

   (a) Determine a ordem de b.

   (b) Determine os subgrupos $< b^7 >$ e $< b^6 >$ de G e indique, justificando, outro gerador do subgrupo $< b^6 >$.

4. Seja G um grupo. Mostre que a aplicação $\phi : G \longrightarrow G$, definida por $\phi(x) = x^{-1}$, para todo $x \in G$,
   (i) é uma bijeção;
   (ii) é um isomorfismo (i.e., um morfismo bijetivo), se e só se G é abeliano.

5. Mostre que se K é um subgrupo normal de um grupo G então existe um morfismo ϕ tal que $K = \mathrm{Nuc}\,\phi$.

6. Diga, **sem justificar**, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

   (a) Se $G =< a >$ é um grupo cíclico não trivial tal que $a^{16} = a^{30}$, então $G =< a^5 >$;

   (b) Se $G =< g >$ é um grupo cíclico e H é um subgrupo de G então H é normal em G;

   (c) O grupo $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$, produto direto dos grupos aditivos $(\mathbb{Z}_2, +)$, é cíclico;

   (d) Para quaisquer grupos G e H, os grupos $G \otimes H$ e $H \otimes G$ são isomorfos;

   (e) o grupo $(\mathbb{Z}_6, +)$ tem dois geradores distintos;

   (f) um grupo de ordem prima não tem subgrupos próprios não triviais.

Cotação: 1. 5 valores; **2.** 4 valores; **3.** 3 valores; **4.** 3 valores; **5.** 2 valores; **6.** 3 valores