Departamento de Matemática | Universidade do Minho

quarto teste :: Álgebra | 19 de janeiro de 2022

Lic. em Ciências de Computação - 2º ano | duração: uma hora

Proposta de resolução

Responda no próprio enunciado, seguindo rigorosamente as instruções dadas em cada um dos grupos

GRUPO I

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente. Cada questão está cotada com 1.2 valores numa escala de 0 a 20.

1. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Se A' é comutativo então A é comutativo. V☐ F☒

1. Seja $\varphi : A \to A'$ um epimorfismo de anéis. Se A' é comutativo então A é comutativo. V☐ F☒

   Contra-exemplo: Sejam A um anel não comutativo (por exemplo, o anel das matrizes quadradas de ordem 2) e $A' = \{0\}$ (anel trivial, que é comutativo). A aplicação $\varphi : A \to A'$ definida por $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in A$, é um morfismo (de facto, é um epimorfismo).

1. Seja $\varphi : A \to A'$ um monomorfismo de anéis. Se A' é comutativo então A é comutativo. V☒ F☐

   Sejam $x, y \in A$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y) && [\varphi \textit{ é morfismo}] \\ &= \varphi(y)\varphi(x) && [A' \textit{ é comutativo}] \\ &= \varphi(yx). && [\varphi \textit{ é morfismo}] \end{aligned}$$

   Como φ é monomorfismo (injetiva), temos que $xy = yx$. Logo, A é comutativo.

2. A aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definida por $f(x) = [5x]_{10}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é um morfismo de anéis. V☒ F☐

2. A aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definida por $f(x) = [4x]_{10}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é um morfismo de anéis. V☐ F☒

2. A aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definida por $f(x) = [3x]_{10}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é um morfismo de anéis. V☐ F☒

   Fixado $0 \leq k < 10$, a aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$, definida por $f(x) = [kx]_{10}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é morfismo de anéis se e só se $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(xy) = f(x)f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$. A primeira igualdade é trivialmente satisfeita, mas relativamente à segunda temos que

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \Leftrightarrow [kxy]_{10} = [k^2xy]_{10}, \forall x, y \Leftrightarrow k \equiv k^2 (\mod 10) \Leftrightarrow k \in \{1, 5, 6\}.$$

3. Dado o morfismo de anéis $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido por $f(x) = (2x, 3x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos que $\mathrm{Nuc} f = 6\mathbb{Z}$. V☐ F☒

3. Dado o morfismo de anéis $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido por $f(x) = (2x, 3x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos que $\mathrm{Nuc} f = \mathbb{Z}_6$. V☐ F☒

3. Dado o morfismo de anéis $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido por $f(x) = (2x, 3x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos que $\mathrm{Nuc} f = \{0\}$. V☒ F☐

   Uma vez que $0_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = (0, 0)$, por definição de núcleo, temos que

$$\mathrm{Nuc} f = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = (0,0)\} = \{x \in \mathbb{Z} : (2x, 3x) = (0,0)\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 0\} = \{0\}.$$

4. O único morfismo de anéis entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}$ é o morfismo nulo. V☒ F☐

4. O único morfismo de anéis entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ é o morfismo nulo. V☒ F☐

Tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$ são corpos e, como tal, os seus únicos ideais são o ideal trivial e o ideal impróprio. Se f é um morfismo de anéis cujo domínio é $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, sendo $\mathrm{Nuc} f$ um ideal do domínio, $\mathrm{Nuc} f$ ou é o ideal trivial (o que significa que o morfismo f é injetivo) ou é o ideal impróprio (o que significa que o morfismo f é o morfismo nulo). Como não existem aplicações injetivas de domínio $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ e conjunto de chegada $\mathbb{Z}$, concluímos que o morfismo f tem de ser o morfismo nulo.

4. O único morfismo de anéis entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ é o morfismo nulo. V☐ F☒

A aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é um morfismo não nulo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$.

5. Os anéis $\mathbb{Z}_{36}$ e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ são isomorfos. V☒ F☐

Cálculos rotineiros mostram que a aplicação $f : \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$, definida por $f([x]_{36}) = ([x]_4, [x]_9)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é um isomorfismo de anéis.

5. Os anéis $\mathbb{Z}_{36}$ e $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ são isomorfos. V☐ F☒

Os anéis $\mathbb{Z}_{36}$ e $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ têm características diferentes ($c(\mathbb{Z}_{36}) = 36$ e $c(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6) = \mathrm{m.m.c.}(6, 6) = 6$), pelo que os anéis não são isomorfos.

5. Os anéis $\mathbb{Z}_{36}$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}$ são isomorfos. V☐ F☒

Os anéis $\mathbb{Z}_{36}$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}$ têm características diferentes ($c(\mathbb{Z}_{36}) = 36$ e $c(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}) = \mathrm{m.m.c.}(2, 18) = 18$), pelo que os anéis não são isomorfos.

6. Sejam D um domínio de integridade e $a, b, c, d \in D$. Se $a \mid b$ e $c \mid d$ então $(a + c) \mid (b + d)$. V☐ F☒

No domínio de integridade $\mathbb{Z}$, $2, 3, 4, 9 \in \mathbb{Z}$ são tais que $2 \mid 4$, $3 \mid 9$, mas $5 \nmid 13$.

6. Sejam D um domínio de integridade e $a, b, c, d \in D$. Se $a \mid b$ e $c \mid d$ então $(ac) \mid (bc + da)$. V☒ F☐

Se $a \mid b$, como $c \mid c$, temos que $ac \mid bc$. De modo análogo, de $c \mid d$, concluímos que $ac \mid ad$. Como ac é fator de bc e de ad, também é fator de $bc + ad$.

6. Sejam D um domínio de integridade e $a, b, c, d \in D$. Se $a \mid b$ e $c \mid d$ então $(ac)^2 \mid b^2 d^2$. V☒ F☐

Se $a \mid b$ e $c \mid d$, temos que $ac \mid bd$ e, portanto, $(ac)^2 \mid (bd)^2$. Como D é comutativo, $(bd)^2 = b^2 d^2$, pelo que se obtém o pretendido.

7. No domínio de integridade $\mathbb{Z}[i]$, 2 é um elemento irredutível. V☐ F☒

$2 = (1 + i)(1 - i)$ e $1 + i, 1 - i \notin \mathcal{U}_{\mathbb{Z}[i]} = \{1, -1, i, -i\}$.

7. No domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, 2 é um elemento irredutível. V☐ F☒

$2 = -\sqrt{-2} \times \sqrt{-2}$ e $-\sqrt{-2}, \sqrt{-2} \notin \mathcal{U}_{\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]} = \{-1, 1\}$.

7. No domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, 3 é um elemento irredutível. V☐ F☒

$3 = -\sqrt{-3} \times \sqrt{-3}$ e $-\sqrt{-3}, \sqrt{-3} \notin \mathcal{U}_{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]} = \{-1, 1\}$.

8. Num corpo, todos os elementos primos são irredutíveis. V☒ F☐

8. Num corpo todos os elementos irredutíveis são primos. V☒ F☐

8. Num corpo não há elementos irredutíveis. V☒ F☐

Num corpo, todos os elementos não nulos são unidades, pelo que nenhum elemento de um corpo é irredutível ou primo. Assim, as duas primeiras afirmações são verdadeiras pois estamos a fazer uma afirmação sobre todos os elementos do conjunto vazio.

9. Seja D um domínio euclidiano com valoração δ. Então, $\delta(-1_D) = \delta(1_D)$. V☒ F☐

9. Seja D um domínio euclidiano com valoração δ. Então, $\delta(u) = \delta(-u)$, para todo $u \in \mathcal{U}_D$. V☒ F☐

9. Seja D um domínio euclidiano com valoração δ. Então, $\delta(a) = \delta(-a)$, para todo $a \in D$. V☒ F☐

Pela primeira condição da definição de domínio euclidiano, temos que, se $a, b \neq 0_D$ são tais que $a \mid b$, então $\delta(a) \leq \delta(b)$.

Seja $a \in D$. Se $a = 0_D$, temos que $-a = 0_D$, e, por isso, temos trivialmente que $\delta(a) = \delta(-a)$.

Se $a \neq 0_D$, temos que $a \mid -a$ e $-a \mid a$, pelo que o resultado é facilmente obtido.

10. Sejam p e p' elementos primos de um domínio de integridade D. Então, p e p' são associados. V ☒ F ☐

10. Sejam p e p' elementos irredutíveis de um domínio de integridade D. Então, p e p' são associados. V ☐ F ☒

    Os inteiros 2 e 3 são elementos irredutíveis (e primos) de $\mathbb{Z}$ e não são associados (pois $2 \neq \pm 3$).

10. Sejam p e p' elementos primos de um domínio de integridade D tais que $p \mid p'$. Então, p e p' são associados. V ☐ F ☒

    Se $p \mid p'$, então $p' = pa$, para algum $a \in D$. Como p' é primo, p' é irredutível e, portanto, $p \in \mathcal{U}_D$ ou $a \in \mathcal{U}_D$. Como p é primo, por definição, $p \notin \mathcal{U}_D$. Logo, temos que $a \in \mathcal{U}_D$. Assim, $p' \in p\mathcal{U}_D$, pelo que p e p' são associados.

GRUPO II

Este grupo tem duas questões em alternativa, ambas cotadas com 8.0 valores numa escala de 0 a 20. Deve escolher APENAS UMA DAS QUESTÕES para responder. Se responder às duas, ignorarei a segunda resposta.

Alternativa 1. Justifique devidamente todas as respostas. Dê um exemplo, caso exista, de

(a) um morfismo de anéis $\varphi : A \to A'$ para o qual $A/\mathrm{Nuc}\varphi \simeq A'$.

Sejam $A = \mathbb{Z}$, $A' = \mathbb{Z}_5$ e $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ o epimorfismo definido por $\varphi(x) = [x]_5$. Então, tendo em conta o Teorema Fundamental do Homomorfismo, $\mathbb{Z}/\mathrm{Nuc}\varphi \simeq \varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_5$.

(b) um isomorfismo de anéis entre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ e $\mathbb{Z}_{10}$.

O morfismo $f : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ definida por $f([x]_{10}) = ([x]_2, [x]_5)$ é um isomorfismo. De facto, se $([x]_2, [x]_5) = ([y]_2, [y]_5)$, temos que $[x]_2 = [y]_2$ e $[x]_5 = [y]_5$, ou seja, temos que $2 \mid (y - x)$ e $5 \mid (x - y)$. Como 2 e 5 são primos entre si, temos que $10 \mid (y - x)$, pelo que $[x]_{10} = [y]_{10}$ e, portanto, f é injetiva. Como os dois anéis têm o mesmo número de elementos, a função é também sobrejetiva. Assim, f^{-1} é um isomorfismo entre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ e $\mathbb{Z}_{10}$.

(c) um domínio de integridade que não é domínio de fatorização única.

O domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ não é domínio de fatorização única. (ver exercício 85 da folha 11).

(d) dois inteiros gaussianos que admitem um único máximo divisor comum em $\mathbb{Z}[i]$.

Não existem. Entre dois quaisquer elementos existem exatamente 4 máximos divisores comuns. O domínio de integridade $\mathbb{Z}[i]$ é um domínio euclidiano e, por isso, é um domínio de fatorização única. Como tal, existe sempre máximo divisor comum entre dois quaisquer elementos $a, b \in \mathbb{Z}[i]$. No entanto, se d é $\mathrm{m.d.c.}(a, b)$, temos que

$$[a, b] = d\mathcal{U}_{\mathbb{Z}[i]} = \{d, -d, di, -di\}.$$

(e) um morfismo de anéis onde a imagem de um ideal não é um ideal.

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ o morfismo definido por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Temos que $\mathbb{Z}$ é ideal de $\mathbb{Z}$ e $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ não é ideal de $\mathbb{R}$ (os únicos ideais de $\mathbb{R}$ são $\{0\}$ e $\mathbb{R}$).

Alternativa 2. Sejam A um anel com identidade 1_A, I um ideal não trivial de A, $u \in A$ um elemento invertível e $\varphi : A \to A/I$ a aplicação definida por $\varphi(x) = uxu^{-1} + I$, para todo $x \in A$.

(a) Mostre que φ é um morfismo de anéis.

Começamos por observar que a adição e a multiplicação em A/I são as operações usuais de classes.

Sejam $x, y \in \mathbb{A}$. Então:

(i) $\varphi(x) + \varphi(y) = uxu^{-1} + I + uyi^{-1} + I = (uxu^{-1} + uyu^{-1}) + I = u(x + y)u^{-1} + I = \varphi(x + y)$.

(ii) $\varphi(x)\varphi(y) = (uxu^{-1} + I)(uyu^{-1} + I) = ((uxu^{-1})(uyu^{-1})) + I = (uxuu^{-1}yu^{-1}) + I = ux1_Ayu^{-1} + I = uxyu^{-1} + I = \varphi(xy)$.

Por (i) e (ii), concluímos que φ é um homomorfismo.

(b) Mostre que $\mathrm{Nuc}\varphi = I$.

Por definição, $\mathrm{Nuc}\varphi = \{x \in A : \varphi(x) = 0_{A/I}\}$. Como $0_{A/I} = I$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 0_{A/I} \quad & \Leftrightarrow uxu^{-1} + I = I \\ & \Leftrightarrow uxu^{-1} \in I \\ & \Leftrightarrow uxu^{-1} = i, \text{ para algum } i \in I \\ & \Leftrightarrow x = u^{-1}iu^{-1} \in I. \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Nuc}\varphi = I$.

(c) Será φ um monomorfismo? E um epimorfismo? Justifique as suas respostas.

Sabendo que $I \neq \{0_A\}$, temos, por (b), que $\mathrm{Nuc}\varphi \neq \{0\}$ e, portanto, φ não é monomorfismo. No entanto, φ é um epimorfismo. De facto, para qualquer classe $y + I \in A/I$, temos que $y \in A$. Assim, $u^{-1}yu \in A$ e

$$\varphi(u^{-1}yu) = u(u^{-1}yu)u^{-1} + I = 1_A y 1_A + I = y + I.$$