Departamento de Matemática | Universidade do Minho

terceiro teste :: Álgebra | 15 de dezembro de 2021

Lic. em Ciências de Computação - 2º ano | duração: uma hora

Nome ______________________________ Número ______________

Responda no próprio enunciado, seguindo rigorosamente as instruções dadas em cada um dos grupos

GRUPO I

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente. Cada questão está cotada com 1.2 valores numa escala de 0 a 20.

1. Se $(A, +, \times)$ é um anel com identidade, então, $(A, \times)$ é um grupo. V☐ F☒

1. Se $(A, +, \times)$ é um anel comutativo com identidade, então, $(A, \times)$ é um grupo comutativo. V☐ F☒

1. Se $(A, +, \times)$ é um anel comutativo com identidade, então, $(A \backslash \{0_A\}, \times)$ é um grupo comutativo. V☐ F☒

   $(\mathbb{Z}, +, \times)$ é um anel (comutativo) com identidade e $(\mathbb{Z}, \times)$ não é grupo (comutativo) nem $(\mathbb{Z} \backslash \{0\}, \times)$ é grupo comutativo.

2. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$ é 216. V☐ F☒

2. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{15}$ é 165. V☒ F☐

2. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{9}$ é 108. V☐ F☒

   Sejam $n, m \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Então, $c(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m) = \mathrm{m.m.c.}(n, m)$.

3. O anel $\{0\} \times \mathbb{Z}$ é um domínio de integridade. V☒ F☐

   $\{0\} \times \mathbb{Z}$ é um anel comutativo com identidade $(0, 1)$ no qual $(0, 0)$ é o único divisor de zero.

3. O anel $\mathbb{Z} \times \{0\}$ é um domínio de integridade. V☒ F☐

   $\mathbb{Z} \times \{0\}$ é um anel comutativo com identidade $(1, 0)$ no qual $(0, 0)$ é o único divisor de zero.

3. O anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um domínio de integridade. V☐ F☒

   $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um anel comutativo com identidade $(1, 1)$ com divisores de zero não nulos, como é exemplo $(1, 0)$, uma vez que $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$.

4. Sejam A um anel e $a \in A$. Se $o(a) = 7$, então, a não é um divisor de zero em A. V☐ F☒

4. Sejam A um anel e $a \in A$. Se $o(a) = 5$, então, a não é um divisor de zero em A. V☐ F☒

4. Sejam A um anel e $a \in A$. Se $o(a) = 11$, então, a não é um divisor de zero em A. V☐ F☒

   Se $n \geq 4$ é um natural par, em $\mathbb{Z}_n$, a classe $[2]_n$ tem ordem $\frac{n}{2}$ e é um divisor de zero já que $[\frac{n}{2}]_n \neq [0]_n$ e $[2]_n \times [\frac{n}{2}]_n = [n]_n = [0]_n$.

5. Se A_1 e A_2 são subanéis de um anel A, então, $A_1 \cap A_2$ é um subanel de A. V☒ F☐

5. Se A_1 e A_2 são subanéis de um anel A, então, $A_1 \cup A_2$ é um subanel de A. V☐ F☒

5. Se A_1 e A_2 são subanéis de um anel A, então, $A_1 + A_2$ é um subanel de A. V☐ F☒

   A interseção de dois subanéis de um anel A é um subanel de A; a união de dois subanéis é um subanel se e só se um deles estiver contido no outro; a soma de subanéis é um subanel se um deles for um ideal.

6. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ é um subcorpo de $(\mathbb{R}, +, \times)$. V☒ F☐

6. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ é um ideal de $(\mathbb{R}, +, \times)$. V☐ F☒

6. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ é um subanel de $(\mathbb{R}, +, \times)$. V☒ F☐

   Tanto $(\mathbb{Q}, +, \times)$ como $(\mathbb{R}, +, \times)$ são corpos e, por isso, são anéis. Como $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, temos que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ tanto é subanel como é subcorpo de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Sendo um corpo, $(\mathbb{R}, +, \times)$ admite apenas dois ideais: o ideal trivial $\{0\}$ e o próprio $\mathbb{R}$.

7. Todo o elemento simplificável de um anel com identidade é invertível. V☐ F☒

   No anel dos inteiros, se $x \neq 0$, x é simplificável. No entanto, apenas 1 e -1 são invertíveis.

7. Todo o elemento simplificável de um anel com identidade é um divisor de zero. V☐ F☒

7. Todo o elemento simplificável de um anel com identidade não é um divisor de zero. V☒ F☐

   Se x é simplificável e $y \in A$ é tal que $xy = 0_A$, temos que $xy = x0_A$ e, por isso, $y = 0_A$. Logo, x não é divisor de zero.

8. $2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ é um ideal primo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. V☐ F☒

8. $4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ é um ideal primo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. V☐ F☒

8. $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um ideal primo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. V☒ F☐

   Os únicos ideais primos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ são $\{0\} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \{0\}$, $p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times p\mathbb{Z}$, com p primo.

9. A soma de dois ideais maximais de um anel é um ideal maximal desse mesmo anel. V☐ F☒

9. A soma de dois ideais primos de um anel é um ideal primo desse mesmo anel. V☐ F☒

9. A soma de um ideal maximal com um ideal primo de um anel é um ideal primo desse mesmo anel. V☐ F☒

   $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ são ideais primos e maximais de $\mathbb{Z}$. No entanto, $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, que é um ideal não primo e não maximal de $\mathbb{Z}$.

10. $\{[0]_8, [4]_8\}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}_8$. V☐ F☒

    $\{\{[0]_8, [4]_8\}$ e $\{\{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\}$ são ideais de $\mathbb{Z}_8$ tais que $\{\{[0]_8, [4]_8\} \subsetneq \{\{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\} \subsetneq \mathbb{Z}_8$, pelo que a afirmação é claramente falsa.

10. $\{[0]_4, [2]_4\}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}_4$. V☒ F☐

    Os ideais de $\mathbb{Z}_4$ são $\{[0]_4\}$, $\{\{[0]_4, [2]_4\}$ e $\mathbb{Z}_4$, pelo que a afirmação é claramente verdadeira.

10. $\{[0]_{12}, [6]_{12}\}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}_{12}$. V☐ F☒

    $\{\{[0]_{12}, [6]_{12}\}$ e $\{\{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$ são ideais de $\mathbb{Z}_{12}$ tais que $\{\{[0]_{12}, [6]_{12}\} \subsetneq \{\{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\} \subsetneq \mathbb{Z}_{12}$, pelo que a afirmação é claramente falsa.

GRUPO II

Este grupo tem duas questões em alternativa, ambas cotadas com 8.0 valores numa escala de 0 a 20. Deve escolher APENAS UMA DAS QUESTÕES para responder. Se responder às duas, ignorarei a segunda resposta.

Alternativa 1. Justifique devidamente todas as respostas. Dê um exemplo, caso exista, de

(a) um anel comutativo com identidade A de característica 10 e com um elemento de ordem 3.

   Não existe. se A tem característica finita, a característica é o mínimo múltiplo comum entre as ordens de todos os seus elementos. Acontece que 10 não é múltiplo de 3.

(b) um ideal maximal e um ideal primo não maximal do anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Sabemos que qualquer ideal de $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ é da forma $I \times J$ com I ideal de $\mathbb{Z}$ e J ideal de $\mathbb{R}$. Então, $2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ é um ideal de A. Como o único ideal de A que contém estritamente $2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ é o próprio A, temos que $2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ é um ideal maximal de A.

Por outro lado, $\{0\} \times \mathbb{R}$ é um ideal primo de A pois, para $(a, b), (x, y) \in A$,

$$(a, b) = (x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R} \Rightarrow a = 0 \vee x = 0 \Leftrightarrow (a, b) \in \{0\} \times \mathbb{R} \vee (x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}.$$

No entanto, $\{0\} \times \mathbb{R}$ não é maximal pois

$$\{0\} \times \mathbb{R} \subsetneq 2\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}.$$

(c) um anel A e um seu subanel B que não é ideal de A.

Seja $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{Z}$. Então B é subanel de A e não é ideal de A. Como A é corpo, os seus únicos ideais são $\{0\}$ e A.

(d) um anel A com mais divisores de zero do que elementos simplificáveis.

Seja A o anel $\mathbb{Z}_6$. Sabemos que $[x]_6 \in \mathbb{Z}_6$ é divisor de zero em $\mathbb{Z}_6$ se e só se $\mathrm{m.d.c.}(x, 6) \neq 1$ e que $[x]_6$ é simplificável (se e só se é invertível) em $\mathbb{Z}_6$ se e só se $\mathrm{m.d.c.}(x, 6) = 1$. Logo, $\mathbb{Z}_6$ tem 4 divisores de zero ($[0]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6$) e 2 elementos simplificáveis ($[1]_6, [5]_6$).

(e) Um anel A sem identidade e um seu ideal I tal que A/I seja um anel com identidade.

Considere-se o anel sem identidade dos inteiros pares $2\mathbb{Z}$. Então, $4\mathbb{Z}$ é um ideal de $2\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{4\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}_2$, pelo que é um anel com identidade.

Alternativa 2. Sejam A um anel não nulo e $R = \{x \in A : nx = 0_A, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Mostre que R é um ideal de A;

Para provar que R é um ideal de A, temos de provar as seguintes condições:

i. $R \neq \emptyset$;
ii. $x, y \in R \Rightarrow x - y \in R$;
iii. $x \in R, a \in A \Rightarrow ax, xa \in R$.

De facto,

i. o elemento $0_A \in A$ é tal que $n0_A = 0_A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $0_A \in R$ e, portanto, $R \neq \emptyset$;

ii. sejam $x, y \in R$. Então, $x, y \in A$, $nx = 0_A$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $my = 0_A$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Assim, $x - y \in A$ e

$$(mn)(x - y) = (nm)x - (mn)y = m(nx) - n(my) = m0_A - n0_A = 0_A - 0_A = 0_A,$$

com $mn \in \mathbb{N}$. Logo, $x - y \in R$;

iii. sejam $x \in R$ e $a \in A$. Então, $x, a \in A$ e $nx = 0_A$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, $ax, xa \in A$ e

$$n(ax) = a(nx) = a0_A = 0_A$$

e

$$n(xa) = (nx)a = 0_Aa = 0_A,$$

pelo que $ax, xa \in R$.

(b) Determine R, sabendo que:

i. $A = \mathbb{Z}$;

Sabemos que se $a \in \mathbb{Z}$ é tal que $na = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então, $a = 0$, uma vez que $c(\mathbb{Z}) = 0$. Logo, $R = \{0\}$.

ii. $A = \mathbb{Z}_{10}$.

Sabemos que, para todo $[a]_{10} \in \mathbb{Z}_{10}$, $10[a]_{10} = [0]_{10}$, uma vez que $c(\mathbb{Z}_{10}) = 10$. Logo, $R = \mathbb{Z}_{10}$.

(c) Dê um exemplo de um domínío de integridade A onde R seja um ideal maximal. Sabemos que se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $na = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então, $a = 0$, uma vez que $c(\mathbb{R}) = 0$. Logo, $R = \{0\}$. Como $\mathbb{R}$ é corpo, os únicos ideais de $\mathbb{R}$ são $\{0\}$ e $\mathbb{R}$, pelo que $R = \{0\}$ é claramente um ideal maximal.