Departamento de Matemática | Universidade do Minho

segundo teste :: Álgebra | 24 de novembro de 2021

Lic. em Ciências de Computação - 2º ano | duração: uma hora

Proposta de resolução

Responda no próprio enunciado, seguindo rigorosamente as instruções dadas em cada um dos grupos

GRUPO I

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente. Cada questão está cotada com 1.2 valores numa escala de 0 a 20.

1. Se G é grupo e $K, H \lhd G$ então $K \cup H \lhd G$. V☐ F☒

1. Se G é grupo e $K, H \lhd G$ então $KH \lhd G$ V☒ F☐

1. Se G é grupo e $K, H \lhd G$ então $K \cap H \lhd G$ V☒ F☐

   A interseção e o produto de dois subgrupos normais são subgrupos normais. A união de subgrupos é subgrupo se e só se um dos subgrupos for a própria união.

2. Se G é um grupo finito e k é um divisor de $|G|$, então G admite um elemento de ordem k. V☐ F☒

   O grupo D_3 tem ordem 6 e tem um elemento de ordem 1, dois elementos de ordem 3 e três elementos de ordem 2. A ordem do grupo admite 6 como divisor e nenhum elemento tem ordem 6.

2. Se G é um grupo cíclico finito e k é um divisor de $|G|$, então G admite um elemento de ordem k. V☒ F☐

   Se $G =< a >$ tem ordem $n \in \mathbb{N}$, então, para k divisor de n, $a^{\frac{n}{k}} \in G$ tem ordem k.

2. Se G é um grupo abeliano finito e k é um divisor de $|G|$, então G admite um elemento de ordem k. V☐ F☒

   O grupo 4-Klein é abeliano e tem ordem 4. Os seus elementos têm ordem 1 ou 2. A ordem do grupo admite 4 como divisor e não existe um elemento no grupo com ordem 4.

3. Seja G um grupo. Então, $\varphi : G \to G$ definida por $\varphi(x) = x^3$, para todo $x \in G$, é um morfismo de grupos. V☐ F☒

3. Seja G um grupo abeliano. Então, $\varphi : G \to G$ definida por $\varphi(x) = x^3$, para todo $x \in G$, é um morfismo de grupos. V☒ F☐

3. Seja G um grupo. Então, $\varphi : G \to G$ definida por $\varphi(x) = x^{-3}$, para todo $x \in G$, é um morfismo de grupos. V☐ F☒

   A aplicação $\varphi : G \to G$, definida por $\varphi(x) = x^3$, para todo $x \in G$, é um morfismo se e só se $(xy)^3 = x^3y^3$, para todos $x, y \in G$. Sabemos que esta igualdade se verifica se e só se G é abeliano. Conclusão idêntica pode ser feita se em vez de 3 tivermos -3.

4. Se G é um grupo não abeliano de ordem 8 então G tem pelo menos 3 subgrupos. V☒ F☐

4. Se G é um grupo não abeliano de ordem 10 então G tem um subgrupo de ordem 5 . V☒ F☐

4. Se G é um grupo não abeliano de ordem 10 então G tem pelo menos 3 subgrupos. V☒ F☐

   Um grupo não abeliano de ordem 8 tem um subgrupo de ordem 4 (ver exercício 39 da folha 6). Como um grupo de ordem 8 admite sempre como subgrupos o subgrupo trivial e o subgrupo impróprio, podemos concluir que um grupo não abeliano de ordem 8 tem pelo menos três subgrupos. A resolução do exercício 39 é análoga se substituirmos 8 por 10, uma vez que $8 = 2 \times 4$ e $10 = 2 \times 5$.

5. Se um grupo G tem 7 elementos então $G \simeq \mathbb{Z}_7$. V☒ F☐

5. Se um grupo G tem 5 elementos então $G \simeq \mathbb{Z}_5$. V☒ F☐

5. Se um grupo G tem 8 elementos então $G \simeq \mathbb{Z}_8$. V☐ F☒

Qualquer grupo com p elementos, com p primo, é cíclico e, por isso, é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

O grupo D_4, das isometrias de um quadrado, tem 8 elementos e não é isomorfo a $\mathbb{Z}_8$.

6. Se $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ é um morfismo não nulo de grupos então φ é um epimorfismo. V☒ F☐

6. Se $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ é um morfismo não nulo de grupos então φ é um epimorfismo. V☐ F☒

6. Se $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8$ é um morfismo não nulo de grupos então φ é um epimorfismo. V☐ F☒

Sendo $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ um morfismo não nulo, sabemos que $\varphi(\mathbb{Z}) \neq \{[0]_n\}$ é subgrupo de $\mathbb{Z}_n$ e, por isso, $|\varphi(\mathbb{Z})|$ tem de ser um divisor de n diferente da identidade. Se n é primo, $|\varphi(\mathbb{Z})| = n$ e, por isso, $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$. Logo, φ é um epimorfismo (morfismo sobrejetivo).

No caso de $n > 2$ ser par, o morfismo $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ definido por $\varphi(x) = [0]_n$, se x é par, e $\varphi(x) = [\frac{n}{2}]_n$, se x é ímpar, é claramente não sobrejetivo.

7. Sejam G e G' grupos, $H \lhd G$ e $H' \lhd G'$. Se $G/H \simeq G'/H'$ então $G \simeq G'$. V☐ F☒

7. Sejam G e G' grupos, $H \lhd G$ e $H' \lhd G'$. Se $G/H \simeq G'/H'$ então $H \simeq H'$. V☐ F☒

7. Sejam G e G' grupos, $H \lhd G$ e $H' \lhd G'$. Se $G/H \simeq G'/H'$ então $G \simeq G'$ e $H \simeq H'$. V☐ F☒

Se considerarmos $G = H = \mathbb{Z}_2$ e $G' = H' = \mathbb{Z}_3$ então G/H e G'/H' são grupos triviais e por isso isomorfos e G e G' não são isomorfos e H e H' não são isomorfos.

8. Se $G =< a >$ tem ordem 20, então, G tem 8 geradores. V☒ F☐

8. Se $G =< a >$ tem ordem 20, então, G tem 10 geradores. V☐ F☒

8. Se $G =< a >$ tem ordem 20, então, G tem 12 geradores. V☐ F☒

Se $G =< a >$ tem ordem 20, então, para $1 \leq n \leq 19$, a^n é gerador de G se e só se $\mathrm{m.d.c.}(n, 20) = 1$, ou seja, se e só se $n \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$. Logo, G tem 8 geradores.

Como alternativa de resolução, sabemos que o número de geradores de um grupo cíclico de ordem 20 é dado pelo valor da função de Euler para $n = 20$. O resultado segue de $\varphi(20) = 20 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 8$.

9. Em S_7, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7\ 2\ 3)$. V☒ F☐

$(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7\ 2\ 3) = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Em S_7, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 2\ 7)(2\ 3\ 1\ 4)$. V☐ F☒

$(1\ 5\ 2\ 7)(2\ 3\ 1\ 34) = (1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5) \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Em S_7, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 2\ 7)(2\ 3\ 1\ 4)$. V☒ F☐

$(1\ 5\ 2\ 7)(2\ 3\ 1\ 34) = (1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

10. A permutação $\alpha = (1\ 2\ 3)(2\ 4\ 5)$ de S_6 tem ordem 3. V☐ F☒

$\alpha = (1\ 2\ 3)(2\ 4\ 5) = (1\ 2\ 4\ 5\ 3)$, pelo que $o(\alpha) = 5$.

10. A permutação $\alpha = (1\ 2\ 3)(1\ 4\ 3)$ de S_5 tem ordem 3. V☐ F☒

$\alpha = (1\ 2\ 3)(1\ 4\ 3) = (1\ 4)(2\ 3)$, pelo que $o(\alpha) = 2$.

10. A permutação $\alpha = (1\ 2\ 3)(2\ 4\ 5\ 6)$ de S_6 tem ordem 12. V☐ F☒

$\alpha = (1\ 2\ 3)(2\ 4\ 5\ 6) = (1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 3)$, pelo que $o(\alpha) = 6$.

GRUPO II

Este grupo tem duas questões em alternativa, ambas cotadas com 8.0 valores numa escala de 0 a 20. Deve escolher APENAS UMA DAS QUESTÕES para responder. Se responder às duas, ignorarei a segunda resposta.

Alternativa 1. Justifique devidamente todas as respostas. Dê um exemplo, caso exista, de

(a) um grupo G e dois seus subgrupos H e K tais que $H \lhd G$ e $K \ntriangleleft G$.

Seja $G = D_3 = S_3$, $H = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ (o subgrupo das rotações) e $K = \{id, (1\ 2)\}$. Então, $H \lhd G$, pois $[G : H] = 2$ e $K \ntriangleleft G$ pois

$$(2\ 3)K = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \neq \{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\} = K(2\ 3).$$

(b) uma permutação ímpar de S_9 com ordem 14.

Seja $\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9)$. Então, $\tau \in S_9$, $o(\tau) = \text{m.m.c.}(7, 2) = 14$ (pois os dois ciclos são disjuntos) e τ é uma permutação ímpar uma vez que é produto de um ciclo de comprimento ímpar (ou seja, permutação par) por um ciclo de comprimento par (ou sejam permutação ímpar).

(c) um morfismo de $\mathbb{Z}_5$ em $\mathbb{Z}_6$.

Basta considerar o morfismo nulo, ou seja, o morfismo $\varphi : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_6$ definido por $\varphi([x]_5) = [0]_6$, para todo $[x]_5 \in \mathbb{Z}_5$.

(d) um grupo G e um subgrupo normal H de G tal que $[G : H]$ seja infinito.

Considere-se o grupo aditivo $G = \mathbb{Z}$ e o seu subgrupo $H = \{0\}$. Então, $G/H = \{\{x\} : x \in \mathbb{Z}\}$, que tem tantos elementos quanto $\mathbb{Z}$. Logo, $[G : H] = |G/H|$ é infinito.

(e) Um grupo cíclico com 6 subgrupos.

Se $G = \mathbb{Z}_n$, sabemos que G tem exatamente um subgrupo de ordem k, para qualquer k divisor de n. Assim, pretende-se um inteiro n com exatamente 6 divisores. Basta considerar então $G = \mathbb{Z}_{12}$ (qualquer $n = p \cdot q^2$, com p e q primos, servia o propósito, pois os únicos divisores de n são $1, p, q, pq, q^2$ e n).

Alternativa 2. Sejam G um grupo, H e K subgrupos normais de G tais que $|H| = m$, $|K| = n$ e $G = HK$. Se $\text{m.d.c.}(m, n) = 1$, mostre que:

(a) $H \cap K = \{1_G\}$;

Como $H, K \lhd G$, sabemos que $H \cap K \lhd G$, pelo que $H \cap K \lhd G$ e $H \cap K \lhd K$. Então, $|H \cap K| \mid m$ e $|H \cap K| \mid n$. Como $\text{m.d.c.}(m, n) = 1$, concluímos que $|H \cap K| = 1$ e, por isso, $H \cap K = \{1_G\}$.

(b) dados $h_1, h_2 \in H$ e $k_1, k_2 \in K$,

$$h_1 k_1 = h_2 k_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \text{ e } k_1 = k_2;$$

Sejam $h_1, h_2 \in H$ e $k_1, k_2 \in K$. Então,

$$\begin{aligned} h_1 k_1 = h_2 k_2 \quad &\Rightarrow h_2^{-1} h_1 k_1 k_1^{-1} = h_2^{-1} h_2 k_2 k_1^{-1} \\ &\Rightarrow h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1}. \end{aligned}$$

Como $h_2^{-1} h_1 \in H$ e $k_2 k_1^{-1} \in K$, temos que $h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1} \in H \cap K = \{1_G\}$. Logo, $h_2^{-1} h_1 = 1_G$ e $k_2 k_1^{-1} = 1_G$, pelo que $h_1 = h_2$ e $k_1 = k_2$.

(c) $G/H \simeq K$ e $G/K \simeq H$.

Para provar que $G/H \simeq K$ recorremos ao **2º Teorema do Isomorfismo**, que nos diz que se G é um grupo, $H < G$ e $T \lhd G$, então, $(HT)/_T \cong H/_{(H \cap T)}$.
Neste caso, sabemos que $G = HK$, $H, K \lhd G$, $H \cap K = \{1_G\}$, pelo que, da aplicação do teorema, obtemos:

$$G/H = HK/H \simeq K/\{1_G\} \simeq K.$$

De modo análogo, prova-se que $G/K \simeq H$.