Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Álgebra | exame de recurso – segunda parte – 4 fev 2021

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano | duração: duas horas

Nome ____

Curso ______________________________ Número ____________________

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas descontam 0,2 valores na mesma escala.

Declaração de Honra: "Ao submeter esta avaliação online, declaro por minha honra que irei resolver a prova recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação por qualquer meio, com qualquer pessoa ou repositório de informação, físico ou virtual"

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Em S_6 existem pelo menos uma permutação α par e uma permutação β ímpar tais que $o(\alpha) = o(\beta) = 4$. V☒ F☐

1. Em S_7 existem pelo menos uma permutação α par e uma permutação β ímpar tais que $o(\alpha) = o(\beta) = 6$. V☒ F☐

1. Em S_6 existem pelo menos uma permutação α par e uma permutação β ímpar tais que $o(\alpha) = o(\beta) = 5$. V☐ F☒

1. Em S_6 existem pelo menos uma permutação α par e uma permutação β ímpar tais que $o(\alpha) = o(\beta) = 6$. V☐ F☒

2. Num anel A de característica 13 com identidade 1_A, o elemento $5 \cdot 1_A$ é um divisor de zero de A. V☐ F☒

2. Num anel A de característica 12 com identidade 1_A, o elemento $10 \cdot 1_A$ é um divisor de zero de A. V☒ F☐

2. Num anel A de característica 14 com identidade 1_A, o elemento $4 \cdot 1_A$ é um divisor de zero de A. V☒ F☐

2. Num anel A de característica 12 com identidade 1_A, o elemento $11 \cdot 1_A$ é um divisor de zero de A. V☐ F☒

3. Se A é um anel e B é um subanel de A com identidade 1_B, então, A tem identidade. V☐ F☒

3. Se A é um anel com identidade 1_A e B é um subanel de A tal que $1_A \in B$, então, B tem identidade e $1_B = 1_A$. V☒ F☐

3. Se A é um anel com identidade 1_A e B é um subanel de A que tem identidade, então, $1_B = 1_A$. V☐ F☒

3. Se A é um anel com identidade 1_A e B é um subanel de A, então, B tem identidade e $1_B = 1_A$. V☐ F☒

4. Se a é uma unidade de um anel A com identidade, então a^2 é simplificável. V☒ F☐

4. Se a é uma unidade de um anel A com identidade, então $a^2 - a$ é simplificável. V☐ F☒

4. Se a é uma unidade de um anel A com identidade, então $a^2 + a$ é simplificável. V☐ F☒

4. Se a é uma unidade de um anel A com identidade, então a^3 é simplificável. V☒ F☐

5. $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subanel do anel das matrizes quadradas reais de ordem 2. V☒ F☐

5. $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subanel do anel das matrizes quadradas reais de ordem 2. V☒ F☐

5. $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subanel do anel das matrizes quadradas reais de ordem 2. V☐ F☒

5. $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subanel do anel das matrizes quadradas reais de ordem 2. V☒ F☐

6. Seja A um anel. Então, $I = \{x \in A : 4x = 0_A\}$ é um ideal de A. V☒ F☐

6. Seja A um anel. Então, $I = \{x \in A : 5x = 0_A\}$ é um ideal de A. V☒ F☐

6. Seja A um anel. Então, $I = \{x \in A : 3x = 0_A\}$ é um ideal de A. V☒ F☐

6. Seja A um anel. Então, $I = \{x \in A : 6x = 0_A\}$ é um ideal de A. V☒ F☐

7. Se I e J são ideais de A tais que $I + J \subseteq I \cap J$, então, $I = J$. V☒ F☐

7. Se I e J são ideais de A tais que $I \neq J$, então, $I + J \subsetneq I \cap J$. V☐ F☒

7. Se I e J são ideais de A tais que $I \neq J$, então, $I \cap J \neq I + J$. V☒ F☐

7. Se I e J são ideais de A tais que $I \cap J = I + J$, então, $I = J$. V☒ F☐

8. Se A é um domínio de integridade e I é um ideal de A, então, A/I é um domínio de integridade. V☐ F☒

8. Se A é um anel comutativo e I é um ideal de A, então, A/I é um anel comutativo. V☒ F☐

8. Se A é um anel não comutativo e I é um ideal de A, então, A/I é um anel não comutativo. V☐ F☒

8. Se A é um anel com identidade e I é um ideal de A, então, A/I é um anel com identidade. V☒ F☐

9. Sejam A um anel comutativo com identidade, I um ideal primo e B um subanel de A. Então $I \cap B$ é um ideal primo de A. V☐ F☒

9. Sejam A um anel comutativo com identidade, I um ideal maximal e J um ideal de A. Então $I + J$ é um ideal maximal de A. V☐ F☒

9. Sejam A um anel comutativo com identidade, I um ideal maximal e B um subanel de A. Então $I + B$ é um ideal maximal de A. V☐ F☒

9. Sejam A um anel comutativo com identidade, I um ideal primo e J um ideal de A. Então $I \cap J$ é um ideal primo de A. V☐ F☒

10. Se A é um anel de característica 5, então $(x+y)^5 = x^5 + y^5$ para todo $x \in A$. V☒ F☐

10. Se A é um anel com identidade e $o(1_A) = 6$, então $(x+y)^6 = x^6 + y^6$ para todo $x \in A$. V☐ F☒

10. Se A é um anel de característica 6, então $(x+y)^6 = x^6 + y^6$ para todo $x \in A$. V☐ F☒

10. Se A é um anel com identidade e $o(1_A) = 5$, então $(x+y)^5 = x^5 + y^5$ para todo $x \in A$. V☒ F☐

11. Se A é um anel com identidade 1_A, então, existe um morfismo de anéis $f : A \times A \to A'$ tal que $\mathrm{Nuc} f = \{1_A\} \times A$. V☐ F☒

11. Se A é um corpo, então, existe um morfismo de anéis $f : A \times A \to A'$ tal que $\text{Nuc} f = A \times \{1_A\}$ V☐ F☒

11. Se A é um anel, então, existe um morfismo de anéis $f : A \times A \to A'$ tal que $\text{Nuc} f = \{0_A\} \times A$. V☒ F☐

11. Se A é um domínio de integridade, então, existe um morfismo de anéis $f : A \times A \to A'$ tal que $\text{Nuc} f = A \times \{0_A\}$. V☒ F☐

12. Existem anéis comutativos com identidade onde o ideal nulo é maximal. V☒ F☐

12. O anel $\mathbb{Z}$ tem uma infinidade de ideais maximais. V☒ F☐

12. O ideal nulo de um anel comutativo com identidade nunca é maximal. V☐ F☒

12. No anel dos números reais, $\{0\}$ é um ideal maximal. V☒ F☐

13. $3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. V☒ F☐

13. $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ não é um ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. V☒ F☐

13. $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. V☐ F☒

13. $3\mathbb{Z} \times \{0\}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. V☐ F☒

14. Se I e J são ideais maximais de um anel comutativo com identidade A, então, $1_A \in I + J$. V☐ F☒

14. Se I e J são ideais maximais de um anel comutativo com identidade A, então, $A = I + J$. V☐ F☒

14. Se I e J são ideais maximais distintos de um anel comutativo com identidade A, então, $A = I + J$. V☒ F☐

14. Se I e J são ideais maximais de um anel comutativo com identidade A, então, $I + J$ é um ideal maximal de A. V☐ F☒

15. No anel dos inteiros, temos que $9\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$. V☒ F☐

15. No anel dos inteiros, temos que $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$. V☒ F☐

15. No anel dos inteiros, temos que $9\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z}$. V☐ F☒

15. No anel dos inteiros, temos que $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$. V☐ F☒

16. Seja $f : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então, $A'/\text{Nuc} f$ é isomorfo a A. V☐ F☒

16. Seja $f : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então, $A/\text{Nuc} f$ é isomorfo a $f(A)$. V☒ F☐

16. Seja $f : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então, $A/\text{Nuc} f$ é isomorfo a A'. V☐ F☒

16. Seja $f : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então, $A'/\text{Nuc} f$ é isomorfo a $f(A)$. V☐ F☒

17. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Se A é um corpo então $\varphi(A)$ é um corpo. V☐ F☒

17. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to A$ um morfismo de anéis. Então $\varphi(\mathbb{R})$ é um corpo. V☐ F☒

17. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to A$ um morfismo não nulo de anéis. Então $\varphi(\mathbb{R})$ é um corpo. V☒ F☐

17. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo não nulo de anéis. Se A é um corpo então $\varphi(A)$ é um corpo V☒ F☐

Em cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta:

18. Em S_8, a permutação $\sigma = (1\,2\,3)(4\,5\,1\,)$ tem ordem

☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6

18. Em S_8, a permutação $\sigma = (1\,2\,3)(1\,3\,2\,)$ tem ordem

☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 6

18. Em S_8, a permutação $\sigma = (1\,2\,3)(4\,5\,6\,)$ tem ordem

☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

18. Em S_8, a permutação $\sigma = (1\,2\,3)(4\,3\,2\,1\,)$ tem ordem

☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 8

19. Em S_{10}, se $\beta = (9\,8\,7\,6)$, então

☐ $\beta^2 = (6\,7\,8\,9)$ ☒ $\beta^2 = (6\,8)(7\,9)$ ☐ $\beta^2 = (9\,6)(7\,8)$ ☐ $\beta^2 = (9\,7)$

19. Em S_{10}, se $\gamma = (9\,8\,7\,5\,6)$, então

☐ $\gamma^2 = (9\,7\,6)(8\,5)$ ☒ $\gamma^2 = (6\,8\,5\,9\,7)$ ☐ $\gamma^2 = (6\,5\,7\,8\,9)$ ☐ $\gamma^2 = (9\,7)$

19. Em S_{10}, se $\delta = (9\,8\,7\,6\,5\,4)$, então

☒ $\delta^2 = (7\,5\,9)(4\,8\,6)$ ☐ $\delta^2 = (9\,6)(8\,5)(7\,4)$ ☐ $\delta^2 = (6\,5\,7\,8\,9)$ ☐ $\delta^2 = (9\,7)$

19. Em S_{10}, se $\alpha = (9\,8\,7\,6\,5)$, então

☒ $\alpha^2 = (5\,8\,6\,9\,7)$ ☐ $\alpha^2 = (9\,7\,5)(8\,6)$ ☐ $\alpha^2 = (6\,8\,5\,7\,9)$ ☐ $\alpha^2 = (9\,7)$

20. Em S_7, sabendo que $\alpha^3 = (1\,2)\beta^2$, podemos afirmar que

☐ α é par e β é ímpar ☐ α é ímpar e β é par
☒ α é ímpar ☐ α é par

20. Em S_7, sabendo que $(3\,4)\alpha^2 = (1\,2\,3)\beta$, podemos afirmar que

☐ α é par e β é ímpar ☐ α é ímpar e β é par
☒ β é ímpar ☐ β é par

20. Em S_7, sabendo que $\alpha(1\,2)\alpha^{-1} = (1\,2\,3)\beta$, podemos afirmar que

☐ α é par e β é ímpar ☐ α é ímpar e β é par
☒ β é ímpar ☐ β é par

20. Em S_7, sabendo que $\alpha^2 = (1\,2\,3)\beta$, podemos afirmar que

☐ α é par e β é ímpar ☐ α é ímpar e β é par
☐ β é ímpar ☒ β é par

21. O anel $\mathbb{Z}_{16}$ tem exatamente

☐ 4 divisores de zero ☐ 2 divisores de zero ☒ 8 divisores de zero ☐ 1 divisor de zero

21. O anel $\mathbb{Z}_{17}$ tem exatamente

☐ 17 divisores de zero ☐ 3 divisores de zero ☐ 2 divisores de zero ☒ 1 divisor de zero

21. O anel $\mathbb{Z}_{18}$ tem exatamente

☒ 12 divisores de zero ☐ 9 divisores de zero ☐ 8 divisores de zero ☐ 1 divisor de zero

21. O anel $\mathbb{Z}_{20}$ tem exatamente

☒ 12 divisores de zero ☐ 9 divisores de zero ☐ 8 divisores de zero ☐ 1 divisor de zero

22. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ é

☐ 12 ☒ 60 ☐ 15 ☐ 3

22. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ é

☐ 18 ☐ 3 ☒ 6 ☐ 9

22. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ é

☒ 12 ☐ 2 ☐ 6 ☐ 24

22. A caraterística do anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ é

☒ 0 ☐ 3 ☐ 6 ☐ 18

23. Sejam $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 11\}$ e $f_a : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ a função definida por $f_a([x]_{12}) = [ax]_{12}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, f_a é um morfismo de anéis se e só se

☐ $a \in \{0, 1\}$ ☒ $a \in \{0, 1, 4, 9\}$
☐ $a \in \{1, 5, 7, 11\}$ ☐ $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$

23. Sejam $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 6\}$ e $f_a : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ a função definida por $f_a([x]_7) = [ax]_7$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, f_a é um morfismo de anéis se e só se

☒ $a \in \{0, 1\}$ ☐ $a \in \{0, 1, 4\}$
☐ $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ☐ $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

23. Sejam $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 9\}$ e $f_a : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$ a função definida por $f_a([x]_{10}) = [ax]_{10}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, f_a é um morfismo de anéis se e só se

☐ $a \in \{0, 1\}$ ☒ $a \in \{0, 1, 5, 6\}$
☐ $a \in \{0, 1, 4, 9\}$ ☐ $a \in \{1, 3, 7, 9\}$

23. Sejam $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 7\}$ e $f_a : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ a função definida por $f_a([x]_8) = [ax]_8$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, f_a é um morfismo de anéis se e só se

☒ $a \in \{0, 1\}$ ☐ $a \in \{0, 2, 4, 6\}$
☐ $a \in \{1, 3, 5, 7\}$ ☐ $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

24. Sejam A um anel e I e J ideais de A. Se $A = I + J$, então, o anel $A/I \times A/J$ é isomorfo ao anel

☐ A ☒ $A/(I \cap J)$ ☐ $A/(I + J)$ ☐ $A \times A$

24. Sejam A um anel e K e L ideais de A. Se K é maximal e $L \not\subseteq K$, então, o anel $A/K \times A/L$ é isomorfo ao anel

☐ A ☒ $A/(K \cap L)$ ☐ $A/(K + L)$ ☐ $A \times A$

24. Sejam A um anel e I e J ideais de A. Se $A = I + J$, então, o anel $A/I \times A/J$ é isomorfo ao anel

☐ $A/(I + J)$ ☐ $A \times A$ ☒ $A/(I \cap J)$ ☐ A

24. Seja A um anel tal que $A = I + J$, com I e J ideais de A. Então, o anel $A/I \times A/J$ é isomorfo ao anel

☐ $A/(I + J)$ ☐ $A \times A$ ☐ A ☒ $A/(I \cap J)$

25. Se I é um ideal primo não maximal do anel $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, então, I pode ser

☐ $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ ☐ $\mathbb{R} \times 2\mathbb{Z}$ ☒ $\mathbb{R} \times \{0\}$ ☐ $\{0\} \times \mathbb{Z}$

25. Se I é um ideal primo não maximal do anel $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, então, I pode ser

☐ $\mathbb{Z} \times 11\mathbb{Z}$ ☐ $\mathbb{R} \times 11\mathbb{Z}$ ☒ $\mathbb{R} \times \{0\}$ ☐ $\{0\} \times \mathbb{Z}$

25. Se I é um ideal primo não maximal do anel $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, então, I pode ser

☐ $\mathbb{Z} \times 7\mathbb{Z}$ ☐ $\mathbb{R} \times 7\mathbb{Z}$ ☒ $\mathbb{R} \times \{0\}$ ☐ $\{0\} \times \mathbb{Z}$

25. Se I é um ideal primo não maximal do anel $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, então, I pode ser

☐ $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ ☐ $\mathbb{R} \times 3\mathbb{Z}$ ☒ $\mathbb{R} \times \{0\}$ ☐ $\{0\} \times \mathbb{Z}$