Departamento de Matemática — Universidade do Minho

Álgebra — exame de recurso – segunda parte – 4 fev 2021

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano — duração: duas horas

Nome ______________________________

Curso ______________________ Número ______________

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas descontam 0,2 valores na mesma escala.

Declaração de Honra: "Ao submeter esta avaliação online, declaro por minha honra que irei resolver a prova recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação por qualquer meio, com qualquer pessoa ou repositório de informação, físico ou virtual"

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Em S_7 existem pelo menos uma permutação α par e uma permutação β ímpar tais que $o(\alpha) = o(\beta) = 6$. V☐ F☐

2. Num anel A de característica 12 com identidade 1_A, o elemento $11 \cdot 1_A$ é um divisor de zero de A. V☐ F☐

3. Se A é um anel com identidade 1_A e B é um subanel de A tal que $1_A \in B$, então, B tem identidade e $1_B = 1_A$. V☐ F☐

4. Se a é uma unidade de um anel A com identidade, então $a^2 - a$ é simplificável. V☐ F☐

5. $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subanel do anel das matrizes quadradas reais de ordem 2. V☐ F☐

6. Seja A um anel. Então, $I = \{x \in A : 3x = 0_A\}$ é um ideal de A. V☐ F☐

7. Se I e J são ideais de A tais que $I \neq J$, então, $I \cap J \neq I + J$. V☐ F☐

8. Se A é um domínio de integridade e I é um ideal de A, então, A/I é um domínio de integridade. V☐ F☐

9. Sejam A um anel comutativo com identidade, I um ideal maximal e B um subanel de A. Então $I + B$ é um ideal maximal de A. V☐ F☐

10. Se A é um anel de característica 6, então $(x + y)^6 = x^6 + y^6$ para todo $x \in A$. V☐ F☐

11. Se A é um corpo, então, existe um morfismo de anéis $f : A \times A \to A'$ tal que $\mathrm{Nuc} f = A \times \{1_A\}$ V☐ F☐

12. No anel dos números reais, $\{0\}$ é um ideal maximal. V☐ F☐

13. $3\mathbb{Z} \times \{0\}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. V☐ F☐

14. Se I e J são ideais maximais de um anel comutativo com identidade A, então, $A = I + J$. V☐ F☐

15. No anel dos inteiros, temos que $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$. V☐ F☐

16. Seja $f : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então, $A'/\mathrm{Nuc} f$ é isomorfo a A. V☐ F☐

17. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo não nulo de anéis. Se A é um corpo então $\varphi(A)$ é um corpo V☐ F☐

Em cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta:

18. Em S_8, a permutação $\sigma = (1\,2\,3)(1\,3\,2\,)$ tem ordem

$\square$ 1 $\square$ 2 $\square$ 3 $\square$ 6

19. Em S_{10}, se $\gamma = (9\,8\,7\,5\,6)$, então

$\square$ $\gamma^2 = (9\,7\,6)(8\,5)$ $\square$ $\gamma^2 = (6\,8\,5\,9\,7)$ $\square$ $\gamma^2 = (6\,5\,7\,8\,9)$ $\square$ $\gamma^2 = (9\,7)$

20. Em S_7, sabendo que $(3\,4)\alpha^2 = (1\,2\,3)\beta$, podemos afirmar que

$\square$ α é par e β é ímpar $\square$ α é ímpar e β é par
$\square$ β é ímpar $\square$ β é par

21. O anel $\mathbb{Z}_{20}$ tem exatamente

$\square$ 12 divisores de zero $\square$ 9 divisores de zero $\square$ 8 divisores de zero $\square$ 1 divisor de zero

22. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ é

$\square$ 18 $\square$ 3 $\square$ 6 $\square$ 9

23. Sejam $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 7\}$ e $f_a : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ a função definida por $f_a([x]_8) = [ax]_8$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, f_a é um morfismo de anéis se e só se

$\square$ $a \in \{0, 1\}$ $\square$ $a \in \{0, 2, 4, 6\}$
$\square$ $a \in \{1, 3, 5, 7\}$ $\square$ $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

24. Seja A um anel tal que $A = I + J$, com I e J ideais de A. Então, o anel $A/I \times A/J$ é isomorfo ao anel

$\square$ $A/(I + J)$ $\square$ $A \times A$ $\square$ A $\square$ $A/(I \cap J)$

25. Se I é um ideal primo não maximal do anel $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, então, I pode ser

$\square$ $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ $\square$ $\mathbb{R} \times 2\mathbb{Z}$ $\square$ $\mathbb{R} \times \{0\}$ $\square$ $\{0\} \times \mathbb{Z}$