Departamento de Matemática | Resolução | Universidade do Minho

Álgebra | exame de recurso – primeira parte – 4 fev 2021

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano | duração: duas horas

Nome ______________________________

Curso ______________________ Número ______________

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas descontam 0,2 valores na mesma escala.

Declaração de Honra: "Ao submeter esta avaliação online, declaro por minha honra que irei resolver a prova recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação por qualquer meio, com qualquer pessoa ou repositório de informação, físico ou virtual"

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. O conjunto dos números inteiros módulo 6 é um grupo quando consideramos a adição usual nele definida. V☒ F☐
1. O conjunto dos números naturais é um grupo quando consideramos a adição usual nele definida. V☐ F☒
1. O conjunto dos números inteiros é um grupo quando consideramos a adição usual nele definida. V☒ F☐
1. O conjunto dos números inteiros é um grupo quando consideramos a multiplicação usual nele definida. V☐ F☒
2. Se $*$ é uma operação binária não associativa num conjunto S, então $a*(b*c) \neq (a*b)*c$, para todos $a, b, c \in S$. V☐ F☒
2. Se $*$ é uma operação binária associativa num conjunto S, então $(a*b)*(c*d) = a*(b*c)*d$, para todos $a, b, c, d \in S$. V☒ F☐
2. Se $*$ é uma operação binária comutativa num conjunto S, então $a*(b*c) = (a*b)*c$, para todos $a, b, c \in S$. V☐ F☒
2. Se $*$ é uma operação binária comutativa num conjunto S, então $a*(b*c) = (b*c)*a$, para todos $a, b, c \in S$. V☒ F☐
3. Existe um conjunto finito A tal que $(A, *)$ é grupo, para qualquer operação binária $*$ definida em A. V☒ F☐
3. Existe um conjunto infinito A tal que $(A, *)$ é grupo, para qualquer operação binária $*$ definida em A. V☐ F☒
3. Existe um conjunto A tal que $(A, *)$ é grupo, para qualquer operação binária $*$ definida em A. V☒ F☐
3. Existe um conjunto A não vazio tal que $(A, *)$ é grupo, para qualquer operação binária $*$ definida em A. V☒ F☐
4. Para H ser subgrupo de um grupo G é suficiente que $H \subseteq G$. V☐ F☒
4. Um subgrupo pode ser definido como um subconjunto de um grupo. V☐ F☒
4. É condição necessária para H ser subgrupo de um grupo G que $H \subseteq G$. V☒ F☐
4. Para H ser subgrupo de um grupo G é necessário que $H \subseteq G$. V☒ F☐
5. Sejam G grupo e $H, K \subseteq G$. Se $K < G$ e $H \subseteq K$ então $H < G$. V☐ F☒
5. Sejam G grupo e $H, K \subseteq G$. Se $H < G$ e $H \subseteq K$ então $K < G$. V☐ F☒
5. Sejam G grupo e $H, K \subseteq G$. Se $H < G$ e $H \subseteq K$ então $H \cup K < G$. V☐ F☒
5. Sejam G grupo e $H, K \subseteq G$. Se $H \cup K < G$ então $H < G$ ou $K < G$. V☐ F☒

6. Um grupo cujos subgrupos próprios são abelianos é abeliano. V☐ F☒

6. Existem grupos não abelianos nos quais todos os subgrupos próprios são abelianos. V☒ F☐

6. Um grupo cujos subgrupos são abelianos é abeliano. V☒ F☐

6. Todos os subgrupos não triviais de um grupo não abeliano são não abelianos. V☐ F☒

7. Se G é grupo, então, $G/\{1_G\} = \{\{a\} : a \in G\}$ V☒ F☐

7. Se G é grupo, então, $G/G = \{1_G\}$ V F☒

7. Se G é grupo, então, $G/\{1_G\} = G$. V☐ F☒

7. Se G é grupo, então, $G/G = \{G\}$ V☒ F☐

8. Se G é grupo, $|G| = 6$, $H < G$ e $|H| = 2$, então, $H \lhd G$. V☐ F☒

8. Se G é grupo, $|G| = 12$, $H < G$ e $|H| = 6$, então, $H \lhd G$. V☒ F☐

8. Se G é grupo, $|G| = 10$, $H < G$ e $|H| = 5$, então, $H \lhd G$. V☒ F☐

8. Se G é grupo, $|G| = 6$, $H < G$ e $|H| = 3$, então, $H \lhd G$. V☒ F☐

9. Sejam G o grupo multiplicativo das matrizes invertíveis de ordem 2 e $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$. Então, $H \lhd G$. V☐ F☒

9. Sejam G o grupo multiplicativo das matrizes invertíveis de ordem 2 e $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^+ \right\}$. Então, $H \lhd G$. V☐ F☒

9. Sejam G o grupo multiplicativo das matrizes invertíveis de ordem 2 e $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^+ \right\}$. Então, $H \lhd G$. V☒ F☐

9. Sejam G o grupo multiplicativo das matrizes invertíveis de ordem 2 e $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$. Então, $H \lhd G$. V☒ F☐

10. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite exatamente dois subgrupos. V☐ F☒

10. Todos os subgrupos do grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ são abelianos. V☒ F☐

10. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite um subgrupo não abeliano. V☐ F☒

10. O grupo adtivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite uma infinidade de subgrupos. V☒ F☐

11. Todos os subgrupos do grupo $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ são normais. V☒ F☐

11. Todos os subgrupos do grupo $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$ são normais. V☒ F☐

11. Todos os subgrupos do grupo $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ são normais. V☒ F☐

11. Todos os subgrupos do grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ são normais. V☒ F☐

12. O grupo $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tem ordem 12. V☐ F☒

12. O grupo $6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tem 2 elementos. V☒ F☐

12. O grupo $6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ tem uma infinidade de elementos. V☐ F☒

12. O grupo $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tem ordem 2. V☒ F☐

13. Se G é um grupo e $a \in G$ tem ordem 6, então, $o(a^2) = 3$. V☒ F☐

13. Se G é um grupo e $a \in G$ tem ordem 8, então, $o(a^{10}) = 4$. V☒ F☐

13. Se G é um grupo e $a \in G$ tem ordem 6, então, $o(a^5) = 6$. V☒ F☐

13. Se G é um grupo e $a \in G$ tem ordem 8, então, $o(a^{10}) = 5$. V☐ F☒

14. Todo os endomorfismos num grupo G são aplicações injetivas. V☐ F☒

14. Seja G um grupo. O conjunto dos endomorfismos em G é um grupo para a composição usual de funções. V☐ F☒

14. Seja G um grupo. O conjunto dos automorfismos em G é um grupo para a composição usual de funções. V☒ F☐

14. Se $\varphi : G \to G$ é um endomorfismo de grupos, então, φ é sobrejetiva. V☐ F☒

15. Existe um morfismo de grupos entre um grupo de 6 elementos e um grupo de 25 elementos. V☒ F☐

15. Existe um morfismo de grupos não nulo entre um grupo de 6 elementos e um grupo de 25 elementos. V☐ F☒

15. Existe um morfismo de grupos entre um grupo de 6 elementos e um grupo de 10 elementos. V☒ F☐

15. Existe um morfismo de grupos não nulo entre um grupo de 6 elementos e um grupo de 10 elementos. V☒ F☐

16. O grupo quociente de um grupo cíclico é um grupo cíclico. V☒ F☐

16. O grupo quociente de um grupo cíclico pode não ser um grupo cíclico. V☐ F☒

16. O grupo quociente de um grupo que não é cíclico pode ser um grupo cíclico. V☒ F☐

16. O grupo quociente de um grupo que não é cíclico não é um grupo cíclico. V☐ F☒

17. Sejam G e H grupos cíclicos de ordens 6 e 8, respetivamente. Então $G \times H$ é um grupo cíclico. V☐ F☒

17. Sejam G e H grupos tais que $G =< x >$ e $H =< y >$. Então $G \times H =< (x, y) >$. V☐ F☒

17. Sejam G e H grupos cíclicos de ordens 7 e 6, respetivamente. Então $G \times H$ é um grupo cíclico. V☒ F☐

17. Existem grupos cíclicos G e H tais que $G \times H$ é cíclico. V☒ F☐

Em cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta:

18. Sabendo que $\varphi : \mathbb{Z}_m \to Z_n$ é um morfismo de grupos e $o(\varphi([3]_m)) = 4$, podemos ter

$\boxtimes$ $m = 12 \wedge n = 4$ $\square$ $m = 9 \wedge n = 16$
$\square$ $m = 6 \wedge n = 8$ $\square$ $m = 6 \wedge n = 12$

18. Sabendo que $\varphi : \mathbb{Z}_m \to Z_n$ é um morfismo de grupos e $o(\varphi([3]_m)) = 4$, podemos ter

$\square$ $m = 9 \wedge n = 4$ $\boxtimes$ $m = 16 \wedge n = 4$
$\square$ $m = 6 \wedge n = 8$ $\square$ $m = 6 \wedge n = 12$

18. Sabendo que $\varphi : \mathbb{Z}_m \to Z_n$ é um morfismo de grupos e $o(\varphi([4]_m)) = 3$, podemos ter

$\square$ $m = 3 \wedge n = 4$ $\boxtimes$ $m = 9 \wedge n = 3$
$\square$ $m = 6 \wedge n = 8$ $\square$ $m = 8 \wedge n = 64$

19. O grupo $\mathbb{Z}_{20}$ é gerado por

$\square$ $[2]_{20}$ $\square$ $[15]_{20}$ $\square$ $[12]_{20}$ $\boxtimes$ $[9]_{20}$

19. O grupo $\mathbb{Z}_{14}$ é gerado por

$\square$ $[2]_{14}$ $\square$ $[7]_{14}$ $\boxtimes$ $[3]_{14}$ $\square$ $[10]_{14}$

19. O grupo $\mathbb{Z}_{20}$ é gerado por

$\square$ $[2]_{20}$ $\square$ $[14]_{20}$ $\square$ $[15]_{20}$ $\boxtimes$ $[7]_{20}$

19. O grupo $\mathbb{Z}_{14}$ é gerado por

$\square$ $[2]_{14}$ $\square$ $[12]_{14}$ $\boxtimes$ $[9]_{14}$ $\square$ $[8]_{14}$

20. Sejam G um grupo, $K < G$ e $H \lhd G$. Então

$\square$ $H \cap K \lhd G$ $\boxtimes$ $HK < G$
$\square$ $\{kH : k \in K\} \lhd G/H$ $\square$ $\{kH : k \in K\} < G$

20. Sejam G um grupo, $H < G$ e $K \lhd G$. Então

$\square$ $H \cap K \lhd G$ $\boxtimes$ $HK < G$
$\square$ $\{hK : h \in H\} \lhd G/K$ $\square$ $\{hK : h \in H\} < G$

21. Sejam $G_1 =< x >$ e $G_2 =< y >$ grupos cíclicos de ordem 8 e 12, respetivamente. Sabendo que $H < G_1 \times G_2$ é tal que $|H| = 6$, podemos ter

$\boxtimes$ $H =< a^4 > \times < b^4 >$ $\square$ $H =< a^2 > \times < b^3 >$
$\square$ $H =< (a^2, b^3) >$ $\square$ $H =< (a^4, b^6) >$

21. Sejam $G_1 =< a >$ e $G_2 =< b >$ grupos cíclicos de ordem 6 e 15, respetivamente. Sabendo que $H < G_2 \times G_1$ é tal que $|H| = 10$, podemos ter

$\boxtimes$ $H =< (b^3, a^3) >$ $\square$ $H =< b^2 > \times < a^5 >$
$\square$ $H =< (b^2, a^5) >$ $\square$ $H =< (a^3, b^3) >$

21. Sejam $G_1 =< a >$ e $G_2 =< b >$ grupos cíclicos de ordem 6 e 15, respetivamente. Sabendo que $H < G_1 \times G_2$ é tal que $|H| = 10$, podemos ter

$\boxtimes$ $H =< (a^3, b^3) >$ $\square$ $H =< a^2 > \times < b^5 >$
$\square$ $H =< (a^2, a^5) >$ $\square$ $H =< (a^5, b^2) >$

22. Sejam G um grupo de ordem 15 e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^5 = a^{11}$. Então,

$\square$ $o(a) = 1$ $\square$ $o(a) = 6$ $\boxtimes$ $o(a) = 3$ $\square$ $o(a) = 2$

22. Sejam G um grupo de ordem 10 e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^5 = a^{11}$. Então,

☐ $o(a) = 1$ ☐ $o(a) = 6$ ☐ $o(a) = 3$ ☒ $o(a) = 2$

23. Se G é um grupo comutativo e $a, b \in G$ são tais que $o(a) = 5$ e $o(b) = 6$, então,

☒ $o(ab) = 30$ ☐ $o(ab) = 1$
☐ $o(ab) = 11$ ☐ $o(ab) = 5$

23. Se G é um grupo comutativo e $a, b \in G$ são tais que $o(a) = 4$ e $o(b) = 10$, então,

☒ $o(ab) = 20$ ☐ $o(ab) = 40$
☐ $o(ab) = 14$ ☐ $o(ab) = 2$

23. Se G é um grupo comutativo e $a, b \in G$ são tais que $o(a) = 10$ e $o(b) = 15$, então,

☒ $o(ab) = 30$ ☐ $o(ab) = 1$
☐ $o(ab) = 25$ ☐ $o(ab) = 5$

23. Se G é um grupo comutativo e $a, b \in G$ são tais que $o(a) = 4$ e $o(b) = 6$, então,

☐ $o(ab) = 24$ ☒ $o(ab) = 12$
☐ $o(ab) = 10$ ☐ $o(ab) = 2$

24. Sejam G um grupo finito e $f : \mathbb{Z} \to G$ um epimorfismo de grupos tal que $\mathrm{Nuc} f = 5\mathbb{Z}$. Então,

☒ $|G| = 5$ ☐ $|G| > 5$ ☐ $|G| < 5$

24. Sejam G um grupo finito e $f : \mathbb{Z} \to G$ um epimorfismo de grupos tal que $\mathrm{Nuc} f = 4\mathbb{Z}$. Então,

☒ $|G| = 4$ ☐ $|G| > 4$ ☐ $|G| < 4$

24. Sejam G um grupo finito e $f : \mathbb{Z} \to G$ um epimorfismo de grupos tal que $\mathrm{Nuc} f = 3\mathbb{Z}$. Então,

☒ $|G| = 3$ ☐ $|G| > 3$ ☐ $|G| < 3$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(x) = ([6x]_8, [3x]_4)$, para todo o $x \in \mathbb{Z}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 2\mathbb{Z}$
☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(x) = ([4x]_6, [2x]_4)$, para todo o $x \in \mathbb{Z}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 6\mathbb{Z}$
☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 12\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(x) = ([4x]_8, [7x]_4)$, para todo o $x \in \mathbb{Z}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 2\mathbb{Z}$
☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(x) = ([4x]_8, [2x]_4)$, para todo o $x \in \mathbb{Z}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 2\mathbb{Z}$
☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}$