Departamento de Matemática — Universidade do Minho

Álgebra — exame de recurso – primeira parte – 4 fev 2021

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano — duração: duas horas

Nome ______________________________

Curso ____________________ Número ____________________

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas descontam 0,2 valores na mesma escala.

Declaração de Honra: "Ao submeter esta avaliação online, declaro por minha honra que irei resolver a prova recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação por qualquer meio, com qualquer pessoa ou repositório de informação, físico ou virtual"

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. O conjunto dos números inteiros é um grupo quando consideramos a adição usual nele definida. V☐ F☐
2. Se $*$ é uma operação binária associativa num conjunto S, então $(a * b) * (c * d) = a * (b * c) * d$, para todos $a, b, c, d \in S$. V☐ F☐
3. Existe um conjunto finito A tal que $(A, *)$ é grupo, para qualquer operação binária $*$ definida em A. V☐ F☐
4. Para H ser subgrupo de um grupo G é suficiente que $H \subseteq G$. V☐ F☐
5. Sejam G grupo e $H, K \subseteq G$. Se $H < G$ e $H \subseteq K$ então $H \cup K < G$. V☐ F☐
6. Existem grupos não abelianos nos quais todos os subgrupos próprios são abelianos. V☐ F☐
7. Se G é grupo, então, $G/G = \{1_G\}$ V☐ F☐
8. Se G é grupo, $|G| = 12$, $H < G$ e $|H| = 6$, então, $H \lhd G$. V☐ F☐
9. Sejam G o grupo multiplicativo das matrizes invertíveis de ordem 2 e $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^+ \right\}$. Então, $H \lhd G$. V☐ F☐
10. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite um subgrupo não abeliano. V☐ F☐
11. Todos os subgrupos do grupo $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$ são normais. V☐ F☐
12. O grupo $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tem ordem 12. V☐ F☐
13. Se G é um grupo e $a \in G$ tem ordem 8, então, $o(a^{10}) = 5$. V☐ F☐
14. Seja G um grupo. O conjunto dos automorfismos em G é um grupo para a composição usual de funções. V☐ F☐
15. Existe um morfismo de grupos não nulo entre um grupo de 6 elementos e um grupo de 10 elementos. V☐ F☐
16. O grupo quociente de um grupo que não é cíclico pode ser um grupo cíclico. V☐ F☐
17. Sejam G e H grupos tais que $G =< x >$ e $H =< y >$. Então $G \times H =< (x, y) >$. V☐ F☐

Em cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta:

18. Sabendo que $\varphi : \mathbb{Z}_m \to Z_n$ é um morfismo de grupos e $o(\varphi([3]_m)) = 4$, podemos ter

    ☐ $m = 9 \wedge n = 4$ ☐ $m = 16 \wedge n = 4$
    ☐ $m = 6 \wedge n = 8$ ☐ $m = 6 \wedge n = 12$

19. O grupo $\mathbb{Z}_{20}$ é gerado por

    ☐ $[2]_{20}$ ☐ $[15]_{20}$ ☐ $[12]_{20}$ ☐ $[9]_{20}$

20. Sejam G um grupo, $K < G$ e $H \lhd G$. Então

    ☐ $H \cap K \lhd G$ ☐ $HK \lhd G$
    ☐ $\{kH : k \in K\} \lhd G/H$ ☐ $\{kH : k \in K\} \lhd G$

21. Sejam $G_1 =< a >$ e $G_2 =< b >$ grupos cíclicos de ordem 6 e 15, respetivamente. Sabendo que $H < G_1 \times G_2$ é tal que $|H| = 10$, podemos ter

    ☐ $H =< (a^3, b^3) >$ ☐ $H =< a^2 > \times < b^5 >$
    ☐ $H =< (a^2, a^5) >$ ☐ $H =< (a^5, b^2) >$

22. Sejam G um grupo de ordem 10 e $a \in G\backslash\{1_G\}$ tal que $a^5 = a^{11}$. Então,

    ☐ $o(a) = 1$ ☐ $o(a) = 6$ ☐ $o(a) = 3$ ☐ $o(a) = 2$

23. Se G é um grupo comutativo e $a, b \in G$ são tais que $o(a) = 5$ e $o(b) = 6$, então,

    ☐ $o(ab) = 30$ ☐ $o(ab) = 1$
    ☐ $o(ab) = 11$ ☐ $o(ab) = 5$

24. Sejam G um grupo finito e $f : \mathbb{Z} \to G$ um epimorfismo de grupos tal que $\mathrm{Nuc} f = 3\mathbb{Z}$. Então,

    ☐ $|G| = 3$ ☐ $|G| > 3$ ☐ $|G| < 3$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(x) = ([4x]_8, [2x]_4)$, para todo o $x \in \mathbb{Z}$. Então,

    ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 2\mathbb{Z}$
    ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}$