Departamento de Matemática	Universidade do Minho
Álgebra	exame de recurso – exame global – 4 fev 2021
Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano	duração: duas horas

Nome ____

Curso ______________________________ Número ____________________

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas descontam 0,2 valores na mesma escala.

Declaração de Honra: "Ao submeter esta avaliação online, declaro por minha honra que irei resolver a prova recorrendo apenas aos elementos de consulta autorizados, de forma autónoma e sem trocar qualquer informação por qualquer meio, com qualquer pessoa ou repositório de informação, físico ou virtual"

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Se $*$ é uma operação binária associativa num conjunto S, então $(a*b)*(c*d) = a*(b*c)*d$, para todos $a, b, c, d \in S$. V☐ F☐

2. Existe um conjunto A não vazio tal que $(A, *)$ é grupo, para qualquer operação binária $*$ definida em A. V☐ F☐

3. É condição necessária para H ser subgrupo de um grupo G que $H \subseteq G$. V☐ F☐

4. Se G é grupo, então, $G/\{1_G\} = \{\{a\} : a \in G\}$ V☐ F☐

5. Se G é grupo, $|G| = 12$, $H < G$ e $|H| = 6$, então, $H \lhd G$. V☐ F☐

6. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite um subgrupo não abeliano. V☐ F☐

7. Existe um morfismo de grupos entre um grupo de 6 elementos e um grupo de 25 elementos. V☐ F☐

8. O grupo quociente de um grupo que não é cíclico não é um grupo cíclico. V☐ F☐

9. Em S_6 existem pelo menos uma permutação α par e uma permutação β ímpar tais que $o(\alpha) = o(\beta) = 5$. V☐ F☐

10. Num anel A de característica 12 com identidade 1_A, o elemento $10 \cdot 1_A$ é um divisor de zero de A. V☐ F☐

11. $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subanel do anel das matrizes quadradas reais de ordem 2. V☐ F☐

12. Seja A um anel. Então, $I = \{x \in A : 5x = 0_A\}$ é um ideal de A. V☐ F☐

13. Se A é um domínio de integridade e I é um ideal de A, então, A/I é um domínio de integridade. V☐ F☐

14. Sejam A um anel comutativo com identidade, I um ideal primo e J um ideal de A. Então $I \cap J$ é um ideal primo de A. V☐ F☐

15. Se A é um anel de característica 6, então $(x+y)^6 = x^6 + y^6$ para todo $x \in A$. V☐ F☐

16. Se A é um anel com identidade 1_A, então, existe um morfismo de anéis $f : A \times A \to A'$ tal que $\mathrm{Nuc} f = \{1_A\} \times A$. V☐ F☐

17. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Se A é um corpo então $\varphi(A)$ é um corpo. V☐ F☐

Em cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta:

18. O grupo $\mathbb{Z}_{20}$ é gerado por

$\square$ $[2]_{20}$ $\square$ $[15]_{20}$ $\square$ $[12]_{20}$ $\square$ $[9]_{20}$

19. Sejam $G_1 =< a >$ e $G_2 =< b >$ grupos cíclicos de ordem 6 e 15, respetivamente. Sabendo que $H < G_2 \times G_1$ é tal que $|H| = 10$, podemos ter

$\square$ $H =< (b^3, a^3) >$ $\square$ $H =< b^2 > \times < a^5 >$
$\square$ $H =< (b^2, a^5) >$ $\square$ $H =< (a^3, b^3) >$

20. Se G é um grupo comutativo e $a, b \in G$ são tais que $o(a) = 4$ e $o(b) = 6$, então,

$\square$ $o(ab) = 24$ $\square$ $o(ab) = 12$
$\square$ $o(ab) = 10$ $\square$ $o(ab) = 2$

21. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(x) = ([4x]_8, [2x]_4)$, para todo o $x \in \mathbb{Z}$. Então,

$\square$ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ $\square$ $\mathrm{Nuc}\varphi = 2\mathbb{Z}$
$\square$ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ $\square$ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}$

22. Em S_{10}, se $\delta = (9\,8\,7\,6\,5\,4)$, então

$\square$ $\delta^2 = (7\,5\,9)(4\,8\,6)$ $\square$ $\delta^2 = (9\,6)(8\,5)(7\,4)$ $\square$ $\delta^2 = (6\,5\,7\,8\,9)$ $\square$ $\delta^2 = (9\,7)$

23. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ é

$\square$ 12 $\square$ 2 $\square$ 6 $\square$ 24

24. Sejam $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 9\}$ e $f_a : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$ a função definida por $f_a([x]_{10}) = [ax]_{10}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, f_a é um morfismo de anéis se e só se

$\square$ $a \in \{0, 1\}$ $\square$ $a \in \{0, 1, 5, 6\}$
$\square$ $a \in \{0, 1, 4, 9\}$ $\square$ $a \in \{1, 3, 7, 9\}$

25. Se I é um ideal primo não maximal do anel $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, então, I pode ser

$\square$ $\mathbb{Z} \times 11\mathbb{Z}$ $\square$ $\mathbb{R} \times 11\mathbb{Z}$ $\square$ $\mathbb{R} \times \{0\}$ $\square$ $\{0\} \times \mathbb{Z}$