Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Álgebra | época especial – 21 julho 2021

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano | duração: duas horas

Nome ______________________________

Curso ______________________________ Número ______________________________

Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas descontam 0,2 valores na mesma escala.

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Se $(S, *)$ é um grupóide e $a, b, c \in S$ são tais que $a * (b * c) = (a * b) * c$, então, $(S, *)$ é um semigrupo. V ☐ F ☒
2. Seja $A = \{a, b\}$. Então, das 16 operações binárias que se pode definir em A, apenas duas atribuem a A a estrutura de grupo. V ☒ F ☐
3. $(\mathbb{N}, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. V ☐ F ☒
4. Se G é grupo, $H \lhd G$ e $G/H \simeq G$, então, $H = \{1_G\}$. V ☐ F ☒
5. Seja G um grupo que admite dois subgrupos distintos de ordem 5. Então, 10 é um divisor da ordem de G. V ☐ F ☒
6. No grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ existe pelo menos um elemento não nulo que é simétrico de si próprio. V ☒ F ☐
7. Se G é um grupo, então, existe um morfismo de grupos $f : G \times G \to G$ tal que $\mathrm{Nuc} f = \{1_G\} \times G$. V ☒ F ☐
8. Sejam $n \geq 3$ e H um subgrupo normal do grupo simétrico S_n. Então, S_n/H é um grupo que não é cíclico. V ☐ F ☒
9. Se $\alpha \in S_6$ é tal que $o(\alpha) = 4$, então, α é um ciclo de comprimento 4. V ☐ F ☒
10. No anel $\mathbb{Z}_{12}$, o elemento $4 \cdot [1]_{12} + [3]_{12}$ é um divisor de zero. V ☐ F ☒
11. $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ é um ideal do anel das matrizes quadradas reais de ordem 2. V ☐ F ☒
12. Seja A um anel. Então, $B = \{x \in A : 4x = 0_A\}$ é um subanel de A. V ☒ F ☐
13. Se A é o anel da matrizes quadradas de ordem 2 e I é um ideal de A, então, A/I é um anel não comutativo. V ☐ F ☒
14. Sejam A um anel comutativo com identidade, I um ideal primo e B um subanel de A. Então $I + B$ é um subanel de A. V ☒ F ☐
15. Se A é um anel comutativo com identidade de característica 4, então $(x + y)^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ para todo $x \in A$. V ☒ F ☐
16. A aplicação $f : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{25}$, definida por $f([x]_{10}) = [5x]_{25}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, é um morfismo de anéis. V ☐ F ☒
17. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo não nulo de anéis. Se $\varphi(A)$ é um corpo então A é um corpo V ☐ F ☒

Em cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta:

18. O grupo $\mathbb{Z}_{12}$ é gerado por $\overline{x}$ se e só se

☐ $\overline{x} \in \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{12}\}$ ☐ $\overline{x} \in \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}\}$

☒ $\overline{x} \in \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$ ☐ $\overline{x} \in \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$

19. No grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, o elemento $\overline{x}$ é tal que $o(\overline{x}) = 4$. Então, podemos ter

☐ $\overline{x} = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\overline{x} = 4 + \mathbb{Z}$

☒ $\overline{x} = \frac{1}{4} + \mathbb{Z}$ ☐ $\overline{x} = \frac{1}{4}\mathbb{Z}$

20. Sejam G um grupo comutativo e $H, K < G$ tais que $|H| = 5$ e $|K| = 7$. Então,

☐ $HK < G$ e $|HK| = 12$ ☐ $HK < G$ e $|HK| = 11$

☒ $HK < G$ e $|HK| = 35$ ☐ HK pode não ser subgrupo de G.

21. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(x) = ([4x]_8, [3x]_4)$, para todo o $x \in \mathbb{Z}$. Então,

☐ φ é monomorfismo mas não é epimorfismo. ☐ φ não é monomorfismo mas é epimorfismo.

☐ φ é monomorfismo e epimorfismo. ☒ φ não é monomorfismo nem é epimorfismo.

22. Em S_{10}, se $\beta = (1\ 2\ 3\ 4)\,(9\ 10)$ e $\alpha = (5\ 6\ 7\ 8)$, então,

☐ $\alpha^9\beta^2\alpha^{-1} = (4\ 3\ 2\ 1)$ ☐ $\alpha^9\beta^2\alpha^{-1} = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$

☒ $\alpha^9\beta^2\alpha^{-1} = (1\ 3)(2\ 4)$ ☐ $\alpha^9\beta^2\alpha^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$

23. A caraterística do anel $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_8$ é

☐ 96 ☒ 24 ☐ 20 ☐ 4

24. Para $a \in \mathbb{Z}$, seja $f_a : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ a função definida por $f_a([x]_6) = [ax]_6$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, f_a é um morfismo de anéis se e só se

☐ $[a]_6 \in \{[0]_6, [1]_6\}$ ☐ $[a]_6 \in \{[0]_6, [1]_6, [3]_6\}$

☒ $[a]_6 \in \{[0]_6, [1]_6, [3]_6, [4]_6\}$ ☐ $[a]_6 \in \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6\}$

25. Relativamente aos anéis $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ e $B = \{0\} \times \mathbb{Z}$, podemos afirmar que:

☒ B é um ideal primo e maximal de A. ☐ B é um ideal primo mas não maximal de A.

☐ B é um ideal não primo e não maximal de A. ☐ B não é um ideal de A.