grupos cíclicos

Definição. Um grupo G diz-se *cíclico* se

$$(\exists a \in G) \quad G = \langle a \rangle ,$$

i.e., se existe $a \in G$ tal que

$$(\forall x \in G)\,(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad x = a^n .$$

Exemplo 32. O grupo $(\mathbb{Z}, +)$ é cíclico, já que $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, pois para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $n = n \cdot 1$.

Exemplo 33. O grupo $(\mathbb{R}, +)$ não é cíclico. Não existe nenhum real x tal que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z} :\ a = nx .$$

Exemplo 34. O grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$ é cíclico, já que $\mathbb{Z}_4 = \langle [1]_4 \rangle = \langle [3]_4 \rangle$. De facto,

$$[0]_4 = 0\,[1]_4 = 0\,[3]_4 \qquad [1]_4 = 1\,[1]_4 = 3\,[3]_4$$
$$[2]_4 = 2\,[1]_4 = 2\,[3]_4 \qquad [3]_4 = 3\,[1]_4 = 1\,[3]_4$$

Exemplo 35. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $(\mathbb{Z}_n, +)$ é cíclico, já que $\mathbb{Z}_n = \langle [1]_n \rangle$.

Exemplo 36. O conjunto $G = \{i, -i, 1, -1\}$, quando algebrizado pela multiplicação usual de complexos, é um grupo cíclico. De facto, $G = \langle i \rangle$.

Exemplo 37. O grupo trivial $G = \{1_G\}$ é um grupo cíclico. De facto, $\langle 1_G \rangle = \{1_G\}$.

Proposição. Todo o grupo cíclico é abeliano.

Observação. Observe-se que o recíproco do teorema anterior não é verdadeiro.

Exemplo 38. O grupo 4-Klein é um grupo abeliano. No entanto, não é cíclico, pois $\langle 1_G \rangle = \{1_G\} \neq G$, $\langle a \rangle = \{1_G, a\} \neq G$, $\langle b \rangle = \{1_G, b\} \neq G$ e $\langle c \rangle = \{1_G, c\} \neq G$. Assim, podemos concluir que não existe $x \in G$ tal que $G = \langle x \rangle$.

Teorema. Qualquer subgrupo de um grupo cíclico é cíclico.

Demonstração. Sejam $G = \langle a \rangle$, para algum $a \in G$, e $H < G$.

Se $H = \{1_G\}$, então $H = \langle 1_G \rangle$ e, portanto, H é cíclico.

Se $H \neq \{1_G\}$, então, existe $x = a^n \in G$ $(n \neq 0)$ tal que $x \in H$. Então, H tem pelo menos uma potência positiva de a. Seja d o menor inteiro positivo tal que $a^d \in H$. Vamos provar que $H = \left\langle a^d \right\rangle$:

(i) Por um lado $a^d \in H$, logo $\left\langle a^d \right\rangle \subseteq H$;

(ii) Reciprocamente, seja $y \in H$. Como $y \in G$, $y = a^m$ para algum $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Então, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < d$, tais que

$$y = a^m = a^{dq+r} = a^{qd} a^r .$$

Assim, $a^r = \left(a^d\right)^{-q} a^m \in H$, pelo que $r = 0$. Logo, $a^m = a^{qd} \in \left\langle a^d \right\rangle$, pelo que $H \subseteq \left\langle a^d \right\rangle$. □

Observação. Se o grupo G é cíclico e tem ordem n, isto é, se existe $a \in G$ tal que $G =< a >= \{1_G, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$, então, para qualquer divisor positivo k de n, $< a^{\frac{n}{k}} >$ é um subgrupo de G com ordem k. Mais ainda, um grupo cíclico G de ordem finita n tem um e um só subgrupo de ordem k, para cada k divisor de n.

Exemplo 39. Os subgrupos do grupo cíclico $\mathbb{Z}$ são todos do tipo $n\mathbb{Z}$. De facto, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$.

Observação. Resulta da definição de grupo cíclico que qualquer elemento que tenha ordem igual à ordem do grupo é um seu gerador e que qualquer gerador de um grupo cíclico finito tem ordem igual à ordem do grupo.

Exemplo 40. Em $\mathbb{Z}_4$ tem-se que: $o\left(\overline{3}\right) = 4$ e $\mathbb{Z}_4 = \left\langle \overline{3} \right\rangle$.
Em geral, para $n \geq 2$, como $o([x]_n) = \frac{n}{\text{m.d.c.}(x,n)}$, temos que

$$\mathbb{Z}_n =< [x]_n > \iff \text{m.d.c.}(x, n) = 1.$$

Observação. O número de geradores distintos de um grupo cíclico de ordem n é igual à imagem de n pela função *phi* de Euler, que nos dá o número de números naturais menores do que n e primos com n (recordar que se $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ é a fatorização em primos de n, então $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}))$.

Para um grupo $G = \langle a \rangle$, G é abeliano e se $H < G$, $H = \langle a^d \rangle$, para algum $d \in \mathbb{N}$. Assim, $H \lhd G$, pelo que podemos falar no grupo G/H. Vejamos de seguida como são os elementos deste grupo:

Proposição. Seja $G = \langle a \rangle$ um grupo infinito e $H = \langle a^d \rangle \lhd G$. Então, $H, aH, a^2H, ..., a^{d-1}H$ é a lista completa de elementos de G/H.

Proposição. Dois grupos cíclicos finitos são isomorfos se e só se tiverem a mesma ordem.

Demonstração. Sejam G e T dois grupos cíclicos e finitos. Então, existem $a \in G$ e $b \in T$ tais que $G = \langle a \rangle$ e $T = \langle b \rangle$.
Se $G \cong T$, então obviamente G e T têm a mesma ordem.
Se G e T têm a mesma ordem n, então, $o(a) = o(b) = n$ e

$$G = \left\{1_G, a, a^2, ..., a^{n-1}\right\}, \qquad T = \left\{1_T, b, b^2, ..., b^{n-1}\right\}.$$

Logo, a aplicação $\psi : G \to T$ definida por

$$\psi = \begin{pmatrix} 1_G & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 1_T & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \end{pmatrix}$$

é obviamente um isomorfismo. □

Corolário. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e G um grupo cíclico de ordem n. Então, $G \cong \mathbb{Z}_n$.

Observação. Vimos já que se G é um grupo e $a \in G$ é tal que $o(a) = \infty$, então, para $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m \neq n \Longrightarrow a^m \neq a^n.$$

Assim, se G é infinito e cíclico, temos que $G = \langle a \rangle$ para algum $a \in G$ tal que $o(a) = \infty$, pelo que

$$G = \left\{ ..., a^{-2}, a^{-1}, 1_G, a, a^2, a^3, ... \right\}.$$

Proposição. Se G é um grupo cíclico infinito, então, $G \cong \mathbb{Z}$. □

grupo simétrico

Definição. Seja A um conjunto. Uma *permutação* de A é uma aplicação bijetiva de A em A.

Observação. Se A é um conjunto finito com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), podemos estabelecer uma bijeção entre A e o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, pelo que aqui iremos adoptar esta última notação para qualquer conjunto com n elementos. Assim, dizemos, por exemplo, que

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

é uma permutação de um conjunto com 4 elementos.

Observação. Se A é um conjunto finito com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), sabemos que podemos definir $n!$ permutações de A distintas. Mais ainda, se algebrizarmos este conjunto de $n!$ elementos com a composição de aplicações obtemos, obviamente, um grupo.

(i) A composta de duas permutações é uma permutação;

(ii) A composição de aplicações, em particular de permutações, é associativa;

(iii) A função identidade é uma permutação e é o elemento neutro para a composição de aplicações;

(iv) A aplicação inversa de uma permutação é uma permutação.

Definição. Chama-se *grupo simétrico* de um conjunto com n elementos, e representa-se por S_n, ao grupo das permutações desse conjunto.

Exemplo 41. Se considerarmos um conjunto com dois elementos,

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

Exemplo 42. Se considerarmos um conjunto com 3 elementos,

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exemplo 43. Se considerarmos um conjunto com 4 elementos, temos que

$$\begin{aligned} S_4 = \Bigg\{ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Proposição. O grupo simétrico S_n é não comutativo, para todo $n \geq 3$.

Demonstração. Se f e g são as permutações de S_n definidas por

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1,\ f(k) = k, \forall 4 \leq k \leq n,$$
$$g(1) = 2,\ g(2) = 1,\ g(k) = k, \forall 3 \leq k \leq n,$$

temos que

$$(f \circ g)(1) = 3 \neq 1 = (g \circ f)(1). \qquad \square$$

Definição. Chama-se *grupo diedral* ao grupo das simetrias e rotações de uma linha poligonal.

Representamos por D_n o grupo diedral de um polígono regular com n lados.

Exemplo 44. Recordar $D_3 = S_3$

Representando as simetrias e rotações pelas permutações em $\{1, 2, 3\}$, temos:

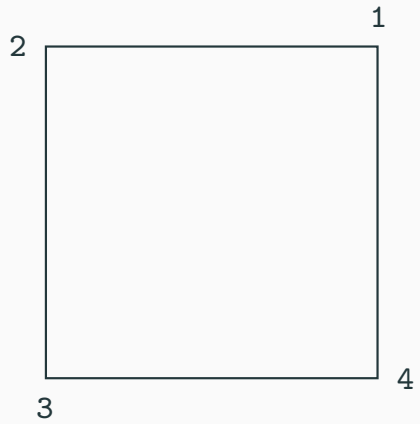
Rotações de 0^o, 120^o e 240^o:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

simetrias em relação às bissetrizes dos ângulos 1, 2 e 3:

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \theta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 45. D_4 é um subgrupo próprio de S_4



Rotações de 0^o, 90^o, 180^o e 270^o:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

Simetrias em relação às bissectrizes $[1,3]$ e $[2,4]$:

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

Simetrias em relação às mediatrizes do lado $[1,2]$ e do lado $[2,3]$:

$$\theta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, D_4 tem 8 elementos enquanto que S_4 tem 24 elementos.

Considerando a composição de funções, obtemos a tabela

ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_4	ρ_1	ρ_2	θ_3	θ_4	θ_1	θ_2
ρ_4	ρ_4	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_4	θ_1	θ_2	θ_3
θ_1	θ_1	θ_4	θ_3	θ_2	ρ_1	ρ_4	ρ_3	ρ_2
θ_2	θ_2	θ_1	θ_4	θ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_4	ρ_3
θ_3	θ_3	θ_2	θ_1	θ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1	ρ_4
θ_4	θ_4	θ_3	θ_2	θ_1	ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1

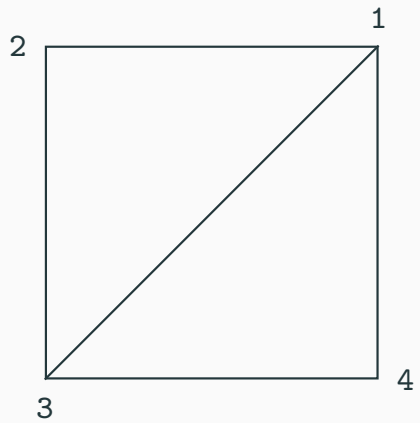
Os subgrupos de D_4 são

$$\{\rho_1\}, \{\rho_1, \theta_1\}, \{\rho_1, \theta_2\}, \{\rho_1, \theta_3\}, \{\rho_1, \theta_4\}, \{\rho_1, \rho_3\},$$

$$\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, \{\rho_1, \rho_3, \theta_1, \theta_3\}, \{\rho_1, \rho_3, \theta_2, \theta_4\}, D_4\}.$$

Destes, quais são normais?

Exemplo 46. Relativamente à figura



o grupo diedral é composto pelas aplicações

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \phi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definição. Diz-se que uma permutação σ de um conjunto finito A é um ciclo de comprimento n se existirem $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tais que

$$\sigma(a_1) = a_2, \quad \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \quad \sigma(a_{n-1}) = a_n, \quad \sigma(a_n) = a_1$$

e se

$$\sigma(x) = x, \qquad \forall x \in A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Neste caso, representa-se este facto por

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Exemplo 47. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observação. Em S_n, o produto (composição) de dois ciclos pode ou não ser um ciclo, como o prova o seguinte exemplo: em S_6,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

não é um ciclo. De facto, se representarmos este produto por σ, temos que $\sigma(2) = 4,\ \sigma(4) = 5,\ \sigma(5) = 2$ e $\sigma(1) \neq 1$.

Por outro lado,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Definição. Dado um conjunto A finito, dizemos que dois ciclos são *disjuntos* se não existir nenhum elemento de A que apareça simultaneamente na notação desses ciclos, i.e., se nenhum elemento de A for transformado simultaneamente pelos dois ciclos.

Exemplo 48. Em S_6,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 6)\,(2 \quad 5 \quad 3)\,,$$

i.e., a permutação σ é o produto de dois ciclos disjuntos.

Teorema. Toda a permutação σ de um conjunto finito é um produto (composição) de ciclos disjuntos. □

Questão: Porque é que é importante escrever uma permutação como produto de ciclos disjuntos?

Resposta: Porque ciclos disjuntos comutam!

$$(1 \quad 2 \quad 3)(4 \quad 5) = (4 \quad 5)(1 \quad 2 \quad 3)$$

$$(1 \quad 2 \quad 3)(1 \quad 2) = (1 \quad 3) \neq (2 \quad 3) = (1 \quad 2)(1 \quad 2 \quad 3)$$

Observação. Relembrar que num grupo G, para $a, b \in G$,

$$ab = ba \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ (ab)^n = a^n b^n.$$

Questão: Dada uma permutação σ num conjunto com n elementos, i.e., dado o elemento $\sigma \in S_n$, qual será a sua ordem?

Resposta:

1. se σ é um ciclo, então $o(\sigma)$ é o comprimento do ciclo.
2. se σ é um produto de pelo menos dois ciclos **disjuntos**, então $o(\sigma)$ é o m.m.c. entre os comprimentos dos ciclos em questão.

Exemplo 49. Em S_8, como $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 4)(5 \quad 7)(6 \quad 8)$, temos que $o(\phi) = 6$ pois o mínimo múltiplo comum entre as ordens dos três ciclos disjuntos é 6.

Definição. Uma *transposição* é um ciclo de comprimento 2.

Proposição. Qualquer ciclo é produto de transposições.

Demonstração. Imediata, tendo em conta que

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n) = (a_1 \quad a_n)\,(a_1 \quad a_{n-1}) \cdots (a_1 \quad a_3)\,(a_1 \quad a_2)\,.$$

□

Observação. Considerando o teorema e a proposição anteriores, temos que qualquer permutação se escreve como produto de transposições.

Exemplo 50. Em S_7,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 4)\,(5 \quad 7 \quad 6) = (1 \quad 4)\,(1 \quad 3)\,(5 \quad 6)\,(5 \quad 7)\,.$$

Teorema. Nenhuma permutação de um conjunto finito pode ser expressa simultaneamente como produto de um número par de transposições e como produto de um número ímpar de transposições. □

Definição. Uma permutação diz-se *par* se se escreve como o produto de um número par de transposições. Uma permutação diz-se *ímpar* se se escreve como produto de um número ímpar de transposições.

Exemplo 51.

- Em $S_n (n \geq 2)$, a identidade é uma permutação par. De facto, se A tem n elementos

  $$\mathrm{id} = (a_i \quad a_j)\,(a_i \quad a_j)\,,$$

  para quaisquer $a_i, a_j \in A$.
- Em S_n, um ciclo de comprimento ímpar é uma permutação par e um ciclo de comprimento par é uma permutação ímpar

  $$(1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 3)\,(1 \quad 2) \qquad\qquad (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) = (1 \quad 4)\,(1 \quad 3)\,(1 \quad 2)\,.$$

Teorema. Seja A um conjunto com n elementos. Então, o conjunto das permutações pares em A é um subgrupo de S_n de ordem $\frac{n!}{2}$.

Demonstração. Seja

$$A_n = \{\sigma : \sigma \text{ é uma permutação par}\}.$$

Sabemos que $\mathrm{id} \in A_n$, que a composição de duas permutações pares é ainda uma permutação par e que a inversa de uma permutação par é ainda uma permutação par. Logo, temos que A_n é um subgrupo do grupo S_n.

Para demonstrar que $|A_n| = \frac{n!}{2}$, basta considerar uma transposição $\tau \in S_n$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_\tau : A_n &\longrightarrow B_n \\ \sigma &\longmapsto \tau\sigma, \end{aligned}$$

onde B_n é o conjunto das permutações ímpares.

Provando que ϕ_τ é bijetiva, temos que $\#(A_n) = \#(B_n)$ e, como $\#(A_n) + \#(B_n) = \#(S_n) = n!$, o resultado é imediato. □

Definição. Seja A um conjunto com n elementos. Chama-se *grupo alterno de* A, e representa-se por A_n, ao subgrupo de S_n das permutações pares.

Exemplo 52. $A_2 = \{id\}$

$A_3 = \{id, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$

$A_4 = \{id, (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,2\,4), (1\,4\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,3),$

$(2\,3\,4), (2\,4\,3), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$

o teorema de representação de Cayley

Teorema de Representação de Cayley

Para finalizarmos este capítulo sobre grupos, vamos mostrar a importância do estudo do grupo simétrico na Teoria de Grupos. De facto, como se prova no próximo teorema, qualquer grupo é isomorfo a um subgrupo de um dado grupo simétrico.

Teorema. **(Teorema de representação de Cayley)** Todo o grupo é isomorfo a um grupo de permutações.

Demonstração. Para cada $x \in G$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \lambda_x : G & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & \lambda_x(a) = xa, \end{array}$$

é uma permutação em G.

Assim, se S é o grupo das permutações de G, consideramos a função

$$\begin{array}{rccc} \theta : & G & \longrightarrow & S \\ & x & \longmapsto & \lambda_x . \end{array}$$

Então, para $x, y, g \in G$,

$$(\lambda_x \circ \lambda_y)(g) = \lambda_x(\lambda_y(g)) = \lambda_x(yg) = x(yg) = (xy)g = \lambda_{xy}(g),$$

pelo que

$$\theta(x)\,\theta(y) = \theta(xy),$$

i.e., θ é um morfismo.

Mais ainda,

$$x \in \mathrm{Nuc}\theta \Leftrightarrow \theta(\mathrm{x}) = \mathrm{id_G} \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{x}} = \mathrm{id_G} \Rightarrow \mathrm{x} = \lambda_{\mathrm{x}}(1_{\mathrm{G}}) = \mathrm{id_G}(1_{\mathrm{G}}) = 1_{\mathrm{G}},$$

e, portanto,

$$\mathrm{Nuc}\theta = \{1_{\mathrm{G}}\}.$$

Logo, θ é um monomorfismo, pelo que $G \cong \mathrm{Im}\theta < S$. □

Exemplo 53. Seja $G = \mathbb{Z}_4$. Então, como para todos $a, x \in \mathbb{Z}_4$, $\lambda_a(x) = a + x$, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_{\bar{0}} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} = \mathrm{id} \\
\lambda_{\bar{1}} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} = (\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{2} \quad \bar{3}) \\
\lambda_{\bar{2}} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = (\bar{0} \quad \bar{2})\,(\bar{1} \quad \bar{3}) \\
\lambda_{\bar{3}} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} = (\bar{0} \quad \bar{3} \quad \bar{2} \quad \bar{1})\,.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathbb{Z}_4 \cong \{\lambda_{\bar{0}}, \lambda_{\bar{1}}, \lambda_{\bar{2}}, \lambda_{\bar{3}}\}$.