morfismos

Definição. Sejam A e A' dois anéis. Uma aplicação $\varphi : A \to A'$ diz-se um *morfismo* (ou *homomorfismo*) *de anéis* se satisfaz as seguintes condições:

1. $(\forall a, b \in A) \qquad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)\,;$
2. $(\forall a, b \in A) \qquad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)\,.$

Um morfismo diz-se um *monomorfismo* (respetivamente, *epimorfismo*, *isomorfismo*) se for injetivo (respetivamente, sobrejetivo, bijetivo)

Um morfismo diz-se um *endomorfismo* se $A = A'$. Um endomorfismo bijetivo diz-se um *automorfismo*.

Exemplo 36. Sejam A e A' anéis. Então, a aplicação $\varphi_0 : A \to A'$ definida por $\varphi_0(x) = 0_{A'}$, para todo $x \in A$, é um morfismo, ao qual chamamos *morfismo nulo.*

Exemplo 37. Seja A um anel. Então, a aplicação identidade em A é um automorfismo, ao qual chamamos *morfismo identidade.*

Exemplo 38. A aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definida por $\varphi(n) = [6n]_{10}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, é um homomorfismo de anéis. De facto, para $n, m \in \mathbb{Z}$ temos:

1. $\varphi(n+m) = [6(n+m)]_{10} = [6n+6m]_{10} = [6n]_{10} + [6m]_{10} = \varphi(n) + \varphi(m)$;
2. $\varphi(nm) = [6(nm)]_{10} = [36(nm)]_{10} = [(6n)(6m)]_{10} = [6n]_{10}[6m]_{10} = \varphi(n)\varphi(m)$, uma vez que $36 \equiv 6 (\mathrm{mod}\, 10)$.

Proposição. Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um morfismo. Então, $\varphi\,(0_A) = 0_{A'}$. $\square$

Exemplo. 39. A aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $\varphi((n, m)) = 3n + m + 3$ não é um morfismo de anéis pois
$\varphi(0_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}) = \varphi((0, 0)) = 3 \times 0 + 0 + 3 = 3 \neq 0 = 0_{\mathbb{Z}}$.

Proposição. Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um morfismo. Então, $(\forall a \in A) \quad \varphi\,(-a) = -\varphi\,(a)$. $\square$

Proposição. Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um morfismo. Então, $(\forall a \in A)\,(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad \varphi\,(ka) = k\varphi\,(a)\,.$

Proposição. Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e B um subanel de A. Então, $\varphi\,(B)$ é um subanel de A'. $\square$

Proposição. Sejam $\varphi : A \to A'$ um epimorfismo de anéis e I um ideal de A. Então, $\varphi\,(I)$ é um ideal de A'. $\square$

Proposição. Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e B' um subanel de A'. Então,

$$\varphi^{-1}(B') = \{x \in A \mid \varphi(x) \in B'\}$$

é um subanel de A. $\square$

Proposição. Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e I' um ideal de A'. Então,

$$\varphi^{-1}(I') = \{x \in A \mid \varphi(x) \in I'\}$$

é um ideal de A. $\square$

Definição. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis.

1. Chama-se *Núcleo de* φ (ou *kernel de* φ), e representa-se por $\mathrm{Nuc}\varphi$ (ou $\mathrm{Ker}\varphi$), ao subconjunto de A definido por

$$\mathrm{Nuc}\varphi = \{x \in A : \varphi(x) = 0_{A'}\};$$

2. Chama-se *imagem de* φ, e representa-se por $\mathrm{Im}\varphi$ ou $\varphi(A)$, ao subconjunto de A' definido por

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) : x \in A\}.$$

Proposição. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então,

1. $\mathrm{Nuc}\varphi$ é um ideal de A;
2. $\mathrm{Im}\varphi$ é um subanel de A'. $\square$

Exemplo 40. Considere-se o morfismo de anéis $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definido por $\varphi(n) = [6n]_{10}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Por um lado, tendo em conta que $\mathrm{Nuc}\,\varphi = \{n \in \mathbb{Z} : \varphi(n) = [0]_{10}\}$ e que

$$\begin{aligned} \varphi(n) = [0]_{10} \quad &\Leftrightarrow [6n]_{10} = [0]_{10} \\ &\Leftrightarrow 6n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10) \\ &\Leftrightarrow n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \tfrac{10}{\mathrm{m.d.c.}(6,10)}) \\ &\Leftrightarrow n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5), \end{aligned}$$

concluímos que $\mathrm{Nuc}\,\varphi = 5\mathbb{Z}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\varphi \quad &= \{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{[6n]_{10} : n \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}. \end{aligned}$$

Proposição. Sejam A um anel e I um seu ideal. Então, a aplicação $\pi : A \to A/I$ definida por $\pi(x) = x + I$ $(x \in A)$, é um epimorfismo (ao qual se chama *epimorfismo canónico*).

Teorema Fundamental do Homomorfismo. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então,

$$A/\mathrm{Nuc}\varphi \cong \varphi(A).$$

1^o Teorema do Isomorfismo. Seja $\varphi : A \to A'$ um epimorfismo de anéis. Se I é um ideal de A tal que $\mathrm{Nuc}\varphi \subseteq I$, então,

$$A/I \cong A'/\varphi(I).$$

2^o Teorema do Isomorfismo. Sejam A um anel e A_1 e A_2 subanéis de A. Se A_2 é um ideal de A, então,

$$(A_1 + A_2)/A_2 \cong A_1/(A_1 \cap A_2).$$