Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação - 2º ano
Exercícios - Folha 9 2021/22

69. Considere os anéis $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e a aplicação $\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $\alpha(m, n) = m$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
    (a) Mostre que α é um epimorfismo de anéis.
    (b) Determine $\operatorname{Nuc} \alpha$.
70. Determine todos os homomorfismos do anel $\mathbb{Z}_{12}$ para o anel $\mathbb{Z}_{28}$.
71. Sejam A um anel, I um ideal de A e $\varphi : A \to A/I$ o epimorfismo canónico. Prove que:
    (a) se A_1 é subanel de A, então $\varphi(A_1) = (A_1 + I)/I$;
    (b) se $\overline{B} = B/I$ é subanel de A/I, então $\varphi^{-1}\left(\overline{B}\right) = B$.
72. Um anel A diz-se um *anel simples* se não tiver outros ideais para além dos ideais $\{0_A\}$ e A.

    Prove que um anel A é um anel simples se e só se todo o morfismo não nulo de domínio A é um monomorfismo.
73. Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um epimorfismo. Prove que se $u \in A$ é a identidade de A, então $\varphi(u)$ é a identidade de A'.
74. Sejam A um anel, I_1 e I_2 ideais de A e $\varphi : A \longrightarrow A/I_1 \times A/I_2$ a aplicação definida por $\varphi(a) = (a + I_1, a + I_2)$, para todo $a \in A$. Mostre que:
    (a) φ é morfismo de anéis.
    (b) $\operatorname{Nuc} \varphi = I_1 \cap I_2$.
    (c) Se $I_1 + I_2 = A$, então,
    $$A/(I_1 \cap I_2) \cong A/I_1 \times A/I_2.$$