Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação - 2º ano
Exercícios - Folha 8 2021/22

58. Justifique que $\mathbb{Z}_3$ não é subanel de $\mathbb{Z}_9$.

59. Prove que o *centro* $Z(A)$ de um anel A, definido por

$$Z(A) = \{x \in A : (\forall y \in A)\, xy = yx\},$$

é um subanel de A.

60. Sejam A um anel e $N = \{n \in \mathbb{Z} : na = 0_A, \forall a \in A\}$.
   (a) Mostre que N é um ideal do anel $\mathbb{Z}$.
   (b) Determine N, sabendo que:
      i. $A = \mathbb{Z}_5$;
      ii. A é um anel com identidade 1_A e $o(1_A) = \infty$.
   (c) Dê um exemplo de um anel A para o qual $\mathbb{Z}/N$ é corpo.

61. Mostre que um subanel de um anel A não é necessariamente um ideal de A.

62. Seja A um anel comutativo com identidade e $a \in A \setminus \{0_A\}$. Prove que $R_a = \{x \in A \mid xa = 0_A\}$ é um ideal próprio de A.

63. Sejam X e Y dois subconjuntos de um anel A. Defina *soma de X com Y, $X+Y$, e produto de X por Y, XY, respetivamente por*

$$X + Y = \{x + y \in A : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

e

$$XY = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in A : n \in \mathbb{N}, x_i \in X, y_i \in Y (i \in \{1, 2, ..., n\})\right\}.$$

   (a) Mostre que a soma de dois subanéis de A não é necessariamente um subanel de A.
   (b) Mostre que o produto de dois subanéis B e C de A é subanel de A se $BC = CB$.

64. Sejam A um anel, B um subanel de A e I e J ideais de A. Prove que:
   (a) $B + I$ é um subanel de A;
   (b) $I + J$ é um ideal de A;
   (c) IJ é um ideal de A tal que $IJ \subseteq I + J$.

65. Seja A um anel comutativo com identidade. Mostre que se I e I' são ideais de A tais que $A = I + I'$ então $II' = I \cap I'$.

66. Sejam A um anel e I um ideal de A. Prove que:
   (a) os subanéis do anel quociente A/I são todos os anéis quociente B/I, em que B é um subanel de A que contem I;
   (b) os ideais do anel quociente A/I são todos os anéis quociente J/I, em que J é um ideal de A que contém I.

67. Sejam A e B dois anéis com identidade. Prove que o conjunto dos ideais do anel com identidade $A \times B$ é

$$\mathcal{I}(A \times B) = \{I \times J : I \text{ é ideal de } A \text{ e } J \text{ é ideal de } B\}.$$

68. Considere o anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Indique:
   (a) um ideal maximal;
   (b) um ideal primo que não seja maximal;
   (c) um ideal próprio não nulo que não seja primo.