Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação - 2º ano
Exercícios - Folha 7 2021/22

49. Sejam A e B anéis e $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$. Considere em $A \times B$ as operações binárias $+$ e $\cdot$ definidas por:
$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{e} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb'),$$
para todos $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$. Prove que:
    (a) O triplo $(A \times B, +, \cdot)$ é um anel;
    (b) O anel $A \times B$ tem identidade se e só se os anéis A e B têm identidade.
50. Seja $n \in \mathbb{N}$. Identifique os divisores de zero de $\mathbb{Z}_n$, para $n \geq 2$.
51. Identifique os divisores de zero de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ e de $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$.
52. Prove que, num anel não nulo com identidade, uma unidade não é divisor de zero.
53. Sejam A um anel de característica zero e $a \in A \setminus \{0_A\}$ um elemento de ordem finita. Prove que a é um divisor de zero.
54. Prove que, num anel com identidade, um elemento idempotente não nulo e diferente da identidade é um divisor de zero. Conclua que o único idempotente não nulo num domínio de integridade é a sua identidade.
55. Sejam A e B dois domínios de integridade. Justifque que $A \times B$ não é um domínio de integridade.
56. Prove que um domínio de integridade finito é um corpo.
57. Um elemento a de um anel A diz-se *nilpotente* se $a^n = 0_A$, para algum natural n. Mostre que 0_A é o único elemento nilpotente num domínio de integridade A.