Álgebra

Licenciatura em Ciências da Computação/Licenciatura em Matemática - 2º ano

Exercícios - Folha 7 2020/21

44. Considere, em $\mathcal{S}_4$, as permutações

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(a) $\beta\alpha$;
(b) $\alpha\beta$;
(c) α^{-1};
(d) β^{-1};
(e) $\beta^{-1}\alpha^{-1}$;
(f) $\alpha^{-1}\beta^{-1}$;
(g) $(\beta\alpha)^{-1}$;
(h) $(\alpha\beta)^{-1}$.

45. Exprima como produto de ciclos disjuntos e como produto de transposições as seguintes permutações de $\mathcal{S}_6$:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $(1\,3\,4)$;

(e) $(2\,5\,6)(3\,4\,5)(6\,4)$;

(f) $(1\,3\,5)(4\,2\,6)(3\,5\,6)$;

(g) $(1\,4\,5)(1\,2\,3\,5)(1\,3)$;

(h) $[(1\,4\,5)(1\,2\,3\,5)(1\,3)]^{-1}$.

46. Considere, em $\mathcal{S}_9$, as permutações

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9) \quad \text{e} \quad \pi = (3\ 2)(1\ 7\ 9).$$

(a) Calcule $\pi\sigma\pi^{-1}$ e exprima-a como produto de ciclos disjuntos.
(b) Determine $\alpha \in S_9$ tal que $\sigma^{16}\alpha = \pi$.
(c) i. Qual a ordem do subgrupo $\langle\pi\rangle$ de $\mathcal{S}_9$? Porquê?
 ii. Identifique os elementos de $\langle\pi\rangle$. Justifique.
(d) Indique, justificando:
 i. um elemento de $\mathcal{S}_9$ que não seja um ciclo e que tenha ordem 6;
 ii. um ciclo ímpar de $\mathcal{S}_9$;
 iii. uma permutação de $\mathcal{S}_9$ que não seja um ciclo;
 iv. uma permutação par de $\mathcal{S}_9$, diferente da identidade.

47. Considere, em $\mathcal{S}_6$, as permutações

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = (2\ 1\ 4\ 6)\,(1\ 3\ 4\ 5)\,.$$

(a) Determine $o(\alpha)$, $o(\beta)$ e $o(\beta^2)$.
(b) Determine a ordem de $\langle\beta^{67}\rangle$.
(c) Justifique que $\langle\alpha,\beta\rangle < \mathcal{A}_6$.

48. Considere, em $\mathcal{S}_9$, as permutações

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(2\,6\,7\,9\,5\,1) \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 9 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Escreva $\sigma\tau^{-1}$ como produto de ciclos disjuntos.
(b) Determine $o(\sigma)$.
(c) Indique os elementos de $< \tau^3 >$.
(d) **Sem efetuar cálculos com composição de funções**, mostre que não existe $\delta \in \mathcal{S}_9$ tal que $\delta^2\tau = \sigma$.