Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação - 2º ano
Exercícios - Folha 6 2021/22

39. Seja G um grupo não abeliano de ordem 8.
   (a) Mostre que G tem um subgrupo H tal que $|H| = 4$.
   (b) Prove que $H \lhd G$.
40. Mostre que os grupos $\mathbb{Z}_{15}/\langle[5]_{15}\rangle$ e $\mathbb{Z}_5$ são isomorfos.
41. Mostre que $8\mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_7$.
42. Determine os subgrupos cíclicos de um grupo cíclico de ordem 10.
43. Seja $G = \langle a\rangle$ um grupo cíclico de ordem ímpar tal que $a^{47} = a^{17}$, $a^{10} \neq 1_G$ e $a^6 \neq 1_G$. Determine, justificando:
   (a) a ordem de G;
   (b) o número de subgrupos de G;
   (c) todos os geradores distintos de G;
   (d) o número de automorfismos de G.
44. Exprima como produto de ciclos disjuntos e como produto de transposições as seguintes permutações de $\mathcal{S}_6$:
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;
   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
   (d) $(1\,3\,4)$;
   (e) $(2\,5\,6)(3\,4\,5)(6\,4)$;
   (f) $(1\,3\,5)(4\,2\,6)(3\,5\,6)$;
   (g) $(1\,4\,5)(1\,2\,3\,5)(1\,3)$;
   (h) $[(1\,4\,5)(1\,2\,3\,5)(1\,3)]^{-1}$.
45. Considere, em $\mathcal{S}_9$, as permutações
$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9) \quad \text{e} \quad \pi = (3\ 2)(1\ 7\ 9).$$
   (a) Calcule $\pi\sigma\pi^{-1}$ e exprima-a como produto de ciclos disjuntos.
   (b) Determine $\alpha \in S_9$ tal que $\sigma^{16}\alpha = \pi$.
   (c) Qual a ordem do subgrupo $\langle\pi\rangle$ de $\mathcal{S}_9$? Porquê?
   (d) Identifique os elementos de $\langle\pi\rangle$. Justifique.
46. Indique, justificando:
   (a) um elemento de $\mathcal{S}_9$ que não seja um ciclo e que tenha ordem 6;
   (b) um ciclo ímpar de $\mathcal{S}_9$;
   (c) uma permutação de $\mathcal{S}_9$ que não seja um ciclo;
   (d) uma permutação par de $\mathcal{S}_9$, diferente da identidade.
47. Considere, em $\mathcal{S}_6$, as permutações
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = (2\ 1\ 4\ 6)\,(1\ 3\ 4\ 5)\,.$$
   (a) Determine $o(\alpha)$, $o(\beta)$ e $o(\beta^2)$.
   (b) Justifique que $\langle\alpha, \beta\rangle < \mathcal{A}_6$.
48. Considere, em $\mathcal{S}_9$, as permutações
$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(2\,6\,7\,9\,5\,1) \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 9 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determine $o(\sigma)$.
   (b) Indique os elementos de $< \tau^3 >$.
   (c) **Sem efetuar cálculos com composição de funções**, mostre que não existe $\delta \in \mathcal{S}_9$ tal que $\delta^2\tau = \sigma$.