Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação/Licenciatura em Matemática - 2º ano
Exercícios - Folha 6 2020/21

37. Seja G um grupo. Mostre que a aplicação $\phi : G \to G$ definida por $\phi(x) = x^{-1}$ é um automorfismo se e só se o grupo G for abeliano.

38. Sejam G e G' grupos e $\varphi : G \to G'$ um morfismo. Mostre que:

    (a) Para cada $x \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$, se tem $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$;

    (b) Se $x \in G$ tem ordem finita, então, $\varphi(x)$ tem ordem finita e $o(\varphi(x)) \mid o(x)$;

    (c) Se $x \in G$ tem ordem finita e φ é isomorfismo, então $\varphi(x)$ tem ordem finita e $o(\varphi(x)) = o(x)$.

39. Mostre que os grupos $\mathbb{Z}_{15}/\langle [5]_{15} \rangle$ e $\mathbb{Z}_5$ são isomorfos.

40. Mostre que $8\mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_7$.

41. Seja G um grupo não abeliano de ordem 8.

    (a) Mostre que G tem um subgrupo H tal que $|H| = 4$.

    (b) Prove que $H \triangleleft G$.

42. Determine os subgrupos cíclicos de um grupo cíclico de ordem 10.

43. Seja $G = \langle a \rangle$ um grupo cíclico de ordem ímpar tal que $a^{47} = a^{17}$, $a^{10} \neq 1_G$ e $a^6 \neq 1_G$. Determine, justificando:

    (a) a ordem de G;

    (b) o número de subgrupos de G;

    (c) todos os geradores distintos de G;

    (d) o número de automorfismos de G.