30. Diga quais das aplicações seguintes são morfismos de grupos, e, nesses casos, classifique-os:

    (a) $\varphi_1 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ definida por $\varphi_1(x) = x + 3$, para todo $x \in \mathbb{Z}$;
    (b) $\varphi_2 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ definida por $\varphi_2(x) = 3x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$;
    (c) $\varphi_3 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, +)$ definida por $\varphi_3(x) = 2^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

31. Seja G um grupo. Mostre que a aplicação $\phi : G \to G$ definida por $\phi(x) = x^{-1}$ é um automorfismo se e só se o grupo G for abeliano.

32. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ a aplicação definida por

$$\varphi((x, y)) = (x + y, x - y) \qquad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

    (a) Mostre que φ é um endomorfismo em $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.
    (b) Determine $\mathrm{Nuc}\ \varphi$.
    (c) Classifique o endomorfismo φ.
    (d) Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, φ^n é um endomorfismo em $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.

33. Sejam G_1, G_2 grupos, $\phi : G_1 \to G_2$ um morfismo e X um subconjunto de G_1. Mostre que $\phi(\langle X \rangle) = \langle \phi(X) \rangle$.

34. Sejam G e G' grupos e $\varphi : G \to G'$ um morfismo. Mostre que:

    (a) Se $H' < G'$ então $\varphi^{-1}(H') = \{x \in G : \varphi(x) \in H'\} < G$;
    (b) Se $H' \lhd G'$ então $\varphi^{-1}(H') \lhd G$.

35. Sejam G e G' grupos e $\varphi : G \to G'$ um morfismo. Mostre que:

    (a) Para cada $x \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$, se tem $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$;
    (b) Se $x \in G$ tem ordem finita, então, $\varphi(x)$ tem ordem finita e $o(\varphi(x)) \mid o(x)$;
    (c) Se $x \in G$ tem ordem finita e φ é isomorfismo, então $\varphi(x)$ tem ordem finita e $o(\varphi(x)) = o(x)$.

36. Sejam G um grupo, H um grupo abeliano, $\theta : G \to H$ um morfismo e $\psi : G \otimes G \to H$ a aplicação definida por: $\psi[(g_1, g_2)] = \theta(g_1)\theta(g_2)^{-1}$. Prove que ψ é um morfismo.

37. Sejam G um grupo, $H < G$ um subgrupo abeliano de G e $\theta, \phi : G \longrightarrow H$ morfismos. Considere o subconjunto S de G definido por $S = \{x \in G : \ \theta(x) = \phi(x)\}$. Mostre que S é um subgrupo normal de G.

38. Sejam G um grupo não trivial, $G \otimes G$ o grupo produto direto e $\phi : G \otimes G \longrightarrow G$ a aplicação definida por $\phi((a, b)) = ab$, para todos $a, b \in G$.

    (a) Prove que a aplicação ϕ é um morfismo se e só se G é comutativo.
    (b) Suponha que o grupo G é comutativo.
        - Determine Nuc ϕ e diga, justificando, se ϕ é um monomorfismo.
        - Diga justificando se o morfismo ϕ é sobrejetivo.