Álgebra

Licenciatura em Ciências da Computação/Licenciatura em Matemática - 2º ano

Exercícios - Folha 4 2020/21

22. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Dados $a, b \in G$, mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:
    (a) $b^{-1}a \in H$;
    (b) existe $h \in H$ tal que $a = bh$;
    (c) $a \in bH$;
    (d) $aH = bH$.

23. Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e $g \in G$. Mostre que gH é um subgrupo de G se e só se $g \in H$.

24. Sejam G um grupo finito e H e K subgrupos de G tais que $K \subseteq H$. Mostre que $[G : H]$ divide $[G : K]$.

25. Sejam G um grupo e H e K subgrupos finitos de G tais que $|H| = m$ e $|K| = n$. Mostre que se $\mathrm{m.d.c.}(n, m) = 1$ então $H \cap K = \{1_G\}$.

26. Seja G um grupo. Em cada uma das alíneas diga, justificando, quais os valores possíveis para a ordem de G.
    (a) $|G| < 50$ e G tem subgrupos de ordem 4 e 10.
    (b) G é finito e tem elementos de ordem p e q, com p e q primos distintos.
    (c) $|G| < 50$ e G tem um subgrupo H de ordem 6 tal que $[G : H] > 4$.

27. Verifique que $\mathbb{Z}_{12}$ tem um subgrupo de ordem k, para cada divisor k de 12.

28. Considere o grupo $G = \{1_G, a, b, c, d, e, f, f, g, h, i, j, k\}$ cuja operação é definida pela seguinte tabela de Cayley:

	1_G	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
1_G	1_G	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	a	f	c	g	h	i	1_G	b	j	k	d	e
b	b	d	1_G	e	a	c	i	h	g	f	k	j
c	c	h	a	i	f	g	k	j	b	1_G	e	d
d	d	i	e	h	g	f	b	1_G	k	j	a	c
e	e	g	d	f	i	h	j	k	1_G	b	c	a
f	f	1_G	g	b	j	k	a	c	d	e	h	i
g	g	j	f	k	1_G	b	e	d	c	a	i	h
h	h	k	i	j	b	1_G	c	a	e	d	f	g
i	i	b	h	1_G	k	j	d	e	a	c	g	f
j	j	e	k	d	c	a	g	f	i	h	1_G	b
k	k	c	j	a	e	d	h	i	f	g	b	1_G

Mostre que G não tem qualquer subgrupo de ordem 6.

29. Sejam G um grupo e $a \in G$. Determine:
    (a) $|\langle a \rangle|$, sabendo que $a^{24} = a^{49}$ e $a^5 \neq 1_G$;
    (b) $|\langle a \rangle|$, sabendo que $a^3 \neq 1_G$ e $a^{11} = a^5$;
    (c) $|\langle a^4 \rangle|$, sabendo que $a \neq 1_G$ e $a^{56} = a^{72}$.