Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação - 2º ano
Exercícios - Folha 3 2021/22

13. Seja $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que $nZ = \{nx : x \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$.

14. (a) Prove que, se G é um grupo abeliano, então, $A = \{x \in G : (\exists n \in \mathbb{N})\ x^n = 1_G\}$ é um subgrupo de G.
    (b) Determine A, sabendo que G é o grupo multiplicativo $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

15. (a) Sejam G um grupo e $A = \{n \in \mathbb{Z} : (\forall a \in G)\ a^n = 1_G\}$. Mostre que $(A, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$, onde $+$ é a adição usual de números inteiros.
    (b) Determine A sabendo que G é o grupo aditivo $\mathbb{Z}_3$.

16. Sejam G um grupo, H_1 e H_2 subgrupos de G. Mostre que:
    (a) $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G;
    (b) $H_1 \cup H_2$ é um subgrupo de G se e só se $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$;
    (c) H_1H_2 é subgrupo de G se e só se $H_1H_2 = H_2H_1$.

    Observação: Dados um grupóide S e $A, B \subseteq S$, representa-se por AB o conjunto $AB = \{ab \in S : a \in A \wedge b \in B\}$.

17. Seja G um grupo e $X, Y \subseteq G$. Mostre que:
    (a) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X\rangle \subseteq \langle Y\rangle$;
    (b) $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq \langle X\rangle \Rightarrow \langle X\rangle = \langle Y\rangle$;
    (c) o recíproco de (a) nem sempre é verdadeiro;
    (d) $\langle\langle X\rangle\rangle = \langle X\rangle$.

18. Em cada alínea, determine o subgrupo indicado:
    (a) $\langle 1\rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$;
    (b) $\langle 3, 4\rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$;
    (c) $\langle -2, 6\rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$;
    (d) $\langle 3, 6, 12\rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$;
    (e) $\langle -1, 1\rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$.

19. Recorde o grupo D_3 cuja operação é definida pela tabela

$\circ$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1	θ_3	θ_1	θ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_2	θ_2	θ_3	θ_1
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
θ_2	θ_2	θ_3	θ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2
θ_3	θ_3	θ_1	θ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1

    Determine a ordem de cada um dos elementos de D_3.

20. Considere os grupos $(\mathbb{Z}_6, +)$ e $(\mathbb{Z}_8, +)$, o grupo produto direto $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$ e o semigrupo comutativo $(\mathbb{Z}_{10}, \times)$.
    (a) Indique:
        i. a identidade do grupo $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$;
        ii. o simétrico do elemento $([3]_6, [5]_8) + ([2]_6, [5]_8)$;
        iii. a ordem dos elementos $([2]_6, [4]_8)$ e $([5]_6, [5]_8)$;
        iv. o inverso do elemento $[3]_{10}$;
        v. o elemento $([3]_{10}\,[9]_{10})^{-1}$.
    (b) Indique, caso existam, um elemento $(a, b) \in \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$ com ordem 14 e um subgrupo H de $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$ com ordem 12. Justifique.

21. Sejam G um grupo comutativo e $a, b \in G$ tais que $o(a) = m$, $o(b) = n$ e $\mathrm{m.d.c.}(n, m) = 1$. Determine a ordem de ab.