Álgebra

Licenciatura em Ciências da Computação/Licenciatura em Matemática - 2º ano

Exercícios - Folha 3 — 2020/21

14. Em cada alínea, determine o subgrupo indicado:
    (a) $\langle 1 \rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$;
    (b) $\langle 3, 4 \rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$;
    (c) $\langle -2, 6 \rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$;
    (d) $\langle 3, 6, 12 \rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$;
    (e) $\langle -1, 1 \rangle$ de $(\mathbb{Z}, +)$.

15. Determine os conjuntos dos subgrupos dos grupos $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ e $(\mathbb{Z}_7^*, \otimes)$ e esboce os diagramas de Hasse desses conjuntos, parcialmente ordenados pela relação de inclusão.

16. Dê um exemplo, ou justifique que não existe, de:
    (a) um grupo G infinito e de um seu subgrupo H que seja finito; um grupo G infinito e de um seu subgrupo H que seja infinito;
    (b) um grupo G finito e de um seu subgrupo H que seja infinito;
    (c) um grupo com um número infinito de subgrupos;
    (d) um grupo G e de um seu subconjunto não vazio H que, sendo fechado para o produto, não constitui um subgrupo de G;
    (e) um grupo G e de um seu subconjunto não vazio H que, contendo os inversos de todos os seus elementos, não é subgrupo de G;
    (f) um grupo sem subgrupos;
    (g) um grupo com apenas um subgrupo;
    (h) um grupo com pelo menos 2 subgrupos.

17. Seja $G = \{e, p, q, a, b, c\}$ o grupo cuja operação é dada pela tabela

$\cdot$	e	p	q	a	b	c
e	e	p	q	a	b	c
p	p	q	e	c	a	b
q	q	e	p	b	c	a
a	a	b	c	e	p	q
b	b	c	a	q	e	p
c	c	a	b	p	q	e

.

Determine a ordem de cada um dos elementos de G.

18. Considere os grupos $(\mathbb{Z}_6, +)$ e $(\mathbb{Z}_8, +)$, o grupo produto direto $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$ e o semigrupo comutativo $(\mathbb{Z}_{10}, \times)$.
    (a) Indique:
        i. a identidade do grupo $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$;
        ii. o simétrico do elemento $([3]_6, [5]_8) + ([2]_6, [5]_8)$;
        iii. a ordem dos elementos $([2]_6, [4]_8)$ e $([5]_6, [5]_8)$;
        iv. o inverso do elemento $[3]_{10}$;
        v. o elemento $([3]_{10}\,[9]_{10})^{-1}$.
    (b) Indique, caso existam, um elemento $(a, b) \in \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$ com ordem 14 e um subgrupo H de $\mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_8$ com ordem 12. Justifique.

19. Sejam G um grupo comutativo e $a, b \in G$ tais que $o(a) = m$, $o(b) = n$ e $\mathrm{m.d.c.}(n, m) = 1$. Determine a ordem de ab.

20. Seja G um grupo. Mostre que se todo o elemento de $G \backslash \{1_G\}$ tem ordem 2 então G é abeliano.

21. Mostre que se G é um grupo finito de ordem n $(n \in \mathbb{N})$ então, para qualquer elemento $a \in G$, $a^n = 1_G$.