Álgebra

Licenciatura em Ciências da Computação - 2º ano

Exercícios - Folha 2 2021/22

6. Considere, no conjunto dos números inteiros, a operação binária definida por

$$m * n = \begin{cases} m+n & \text{se } m \text{ é par} \\ m-n & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Mostre que $(\mathbb{Z}, *)$ é um grupo não abeliano.

7. Considere o conjunto $G = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, munido da operação * definida por

$$a * b = a + b - 2ab, \quad \forall a, b \in G.$$

Prove que $(G, *)$ é um grupo comutativo.

8. Sejam $(G, *)$ e $(K, \circ)$ grupos. No produto cartesiano $G \times K$ considere definida a seguinte operação

$$(g,k) \otimes (g',k') = (g * g', k \circ k'), \qquad g, g' \in G, \quad k, k' \in K.$$

   (a) Mostre que $(G \times K, \otimes)$ é um grupo.
   Este grupo designa-se por *produto direto do grupo* $(G, *)$ *pelo grupo* $(K, \circ)$ e representa-se por $G \otimes K$.

   (b) Prove que o grupo $(G \times K, \otimes)$ é abeliano se e só se os grupos $(G, *)$ e $(K, \circ)$ forem abelianos.

9. Considere os grupos $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$ e $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$ e o seu produto direto.

   (a) Construa a tabela do produto direto $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3$.

   (b) Determine o simétrico de $([1]_2, [2]_3)$.

10. (a) Seja A um conjunto composto por dois elementos distintos. Defina uma operação $*$ em A para a qual A é um grupo.

    (b) Repita o exercício da alínea anterior supondo que A tem

      i. 3 elementos distintos;

      ii. 4 elementos distintos;

      iii. 5 elementos distintos.

11. Complete a seguinte tabela de modo a que, para a operação $*$, se obtenha um grupo comutativo.

$*$	w	x	y	z
w	y			x
x	z	w		
y				
z				w

[Sugestão: Comece por identificar o elemento identidade.]

12. Sejam G um grupo e $a, b \in G$.

    (a) Mostre que:

      i. $ab = ba \Leftrightarrow (ab)^2 = a^2b^2$;

      ii. $ab = ba \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z})\,(ab)^n = a^nb^n$.

    (b) Mostre que $(aba^{-1})^n = ab^na^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.