Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação/Licenciatura em Matemática - 2º ano
Exercícios - Folha 2 2020/21

5. Considere, no conjunto dos números inteiros, a operação binária definida por

$$m * n = \begin{cases} m+n & \text{se } m \text{ é par} \\ m-n & \text{se } m \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Mostre que $(\mathbb{Z}, *)$ é um grupo não abeliano.

6. Considere o conjunto $G = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, munido da operação * definida por

$$a * b = a + b - 2ab, \ \ \forall a, b \in G.$$

Prove que $(G, *)$ é um grupo comutativo.

7. Considere o conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mostre que:
   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ é um grupo para a adição usual dos números reais induzida em $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;
   (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ não é um grupo para a multiplicação usual dos números reais induzida em $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

8. Sejam $(G, *)$ e $(K, \circ)$ grupos. No produto cartesiano $G \times K$ considere definida a seguinte operação

$$(g, k) \otimes (g', k') = (g * g', k \circ k'), \qquad g, g' \in G, \quad k, k' \in K.$$

   (a) Mostre que $(G \times K, \otimes)$ é um grupo.
   Este grupo designa-se por *produto direto do grupo* $(G, *)$ *pelo grupo* $(K, \circ)$ e representa-se por $G \otimes K$.
   (b) Prove que o grupo $(G \times K, \otimes)$ é abeliano se e só se os grupos $(G, *)$ e $(K, \circ)$ forem abelianos.

9. Sejam G um grupo e $a, b \in G$.
   (a) Mostre que:
   i. $ab = ba \Leftrightarrow (ab)^2 = a^2b^2$; ii. $ab = ba \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z})\, (ab)^n = a^nb^n$.
   (b) Mostre que $(aba^{-1})^n = ab^na^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

10. Prove que se G é um grupo abeliano, então

$$A = \{x \in G : (\exists n \in \mathbb{Z})\ x^n = 1_G\}$$

é um subgrupo de G.

11. Sejam G um grupo e $A = \{n \in \mathbb{Z} : (\forall a \in G)\ a^n = 1_G\}$. Mostre que $(A, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$, onde $+$ é a adição usual de números inteiros.

12. Sejam G um grupo, H_1 e H_2 subgrupos de G. Mostre que:
   (a) $H_1 \cap H_2$ é um subgrupo de G;
   (b) $H_1 \cup H_2$ é um subgrupo de G se e só se $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$;
   (c) H_1H_2 é subgrupo de G se e só se $H_1H_2 = H_2H_1$.

   Observação: Dados um grupóide S e $A, B \subseteq S$, representa-se por AB o conjunto $AB = \{ab \in S : a \in A \wedge b \in B\}$.

13. Seja G um grupo e $X, Y \subseteq G$. Mostre que:
   (a) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$;
   (b) $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq \langle X \rangle \Rightarrow \langle X \rangle = \langle Y \rangle$;
   (c) o recíproco de (a) nem sempre é verdadeiro;
   (d) $\langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle$.