Álgebra

Licenciatura em Ciências da Computação - 2º ano

Exercícios - Folha 1 2021/22

1. Considere a operação binária $*$ definida em $S = \{a, b, c, d, e\}$ pela tabela de Cayley

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

   (a) Determine $b * d$, $c * c$ e $[(a * c) * e] * a$.

   (b) Determine $(a * b) * c$ e $a * (b * c)$. Pode concluir que a operação é associativa? Porquê?

   (c) Determine $(b * d) * c$ e $b * (d * c)$. Que pode concluir sobre a associatividade da operação?

   (d) A operação $*$ é comutativa?

2. Seja $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que as igualdades

$$[a]_n \oplus [b]_n = [a + b]_n \qquad \text{e} \qquad [a]_n \otimes [b]_n = [ab]_n,$$

   para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, definem, em $\mathbb{Z}_n$, duas operações binárias.

   (b) Mostre que as operações $\oplus$ e $\otimes$ são comutativas e associativas.

   (c) Identifique o elemento identidade de $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ e o elemento identidade de $(\mathbb{Z}_n, \otimes)$.

   (d) Mostre que qualquer elemento de $\mathbb{Z}_n$ admite um elemento simétrico.

   (e) Justifique que nem todo o elemento de $\mathbb{Z}_n$ admite elemento inverso.

   (f) Construa a tabela de Cayley de $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$, de $(\mathbb{Z}_5, \otimes)$, de $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ e de $(\mathbb{Z}_6, \otimes)$.

   (g) Identifique o conjunto dos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_5$ e o conjunto dos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_6$.

3. Seja n um inteiro positivo. Prove que:

   (a) Se n é ímpar, então nenhum elemento diferente da identidade de $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ é o seu próprio simétrico;

   (b) Se n é par, então exatamente um elemento diferente da identidade de $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ é o seu próprio simétrico;

   (c) Em $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$, ou

$$[0]_n \oplus [1]_n \oplus \cdots \oplus [n-1]_n = [0]_n$$

   ou

$$[0]_n \oplus [1]_n \oplus \cdots \oplus [n-1]_n = [\frac{n}{2}]_n.$$

4. (a) Defina todas as operações binárias possíveis num conjunto singular e num conjunto com 2 elementos.

   (b) Quantas operações binárias é possível definir num conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$)? Porquê?

   (c) Destas operações, quantas são comutativas? E admitem identidade?

5. Suponha que $*$ é uma operação binária, definida num conjunto não vazio S, que admite identidade 1_S e tal que

$$x * (y * z) = (x * z) * y \quad \forall x, y, z \in S.$$

   Prove que a operação $*$ é comutativa e associativa.