82. Sejam D um domínio de integridade e $a, b \in D\backslash\{0_D\}$. Diz-se que $m \in D$ é *mínimo múltiplo comum de a e b* (abreviadamente, m é $\text{m.m.c.}(a, b)$) se

i. $a \mid m$ e $b \mid m$;

ii. $a \mid t$ e $b \mid t \Rightarrow m \mid t$, para todo $t \in D$.

Se existe um $\text{m.m.c.}(a, b)$, representa-se o conjunto de todos os $\text{m.m.c.}(a, b)$ por $[\![a, b]\!]$.

Mostre que

(a) se m é $\text{m.m.c.}(a, b)$ então $[\![a, b]\!] = m\mathcal{U}_D$;

(b) se existe $\text{m.m.c.}(a, b)$, a e a' são associados e b e b' são associados, então, existe $\text{m.m.c.}(a', b')$ e $[\![a', b']\!] = [\![a, b]\!]$;

(c) $a \mid b$ se e só se $[\![a, b]\!] = b\mathcal{U}_D$;

83. Sejam D um domínio de integridade e $a, b, m \in D$ tais que m é $\text{m.m.c.}(a, b)$.

(a) Mostre que existe $d \in D$ tal que $md = ab$.

(b) Mostre que o elemento d determinado em (a) é um $\text{m.d.c.}(a, b)$.

(c) Conclua que, se $d' \in [a, b]$, então existe $u \in \mathcal{U}_D$ tal que $md' = abu$.

84. Mostre que, no anel $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, existe m.d.c. de 2 e $1 + \sqrt{-3}$ mas não existe m.m.c. de 2 e $1 + \sqrt{-3}$.

85. Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ não é um domínio de fatorização única.

86. Sejam D um domínio de ideais principais e $a, b \in D\backslash\{0_D\}$. Mostre que:

(a) d é $\text{m.d.c.}(a, b)$ se e só se $(d) = (a) + (b)$;

(b) m é $\text{m.m.c.}(a, b)$ se e só se $(m) = (a) \cap (b)$.

87. Seja D um domínio euclidiano com valoração δ. Mostre que:

(a) $\delta(1_D) \leq \delta(a)$, para todo $a \in D\backslash\{0_D\}$;

(b) $\delta(a) = \delta(1_D)$ se e só se $a \in \mathcal{U}_D$;

(c) elementos associados têm a mesma valoração.

88. Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ é um domínio euclidiano com valoração δ definida por $\delta(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.

89. Construa o corpo de frações do domínio de integridade $\mathbb{Z}[-2]$.