Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação - 2º ano
Exercícios - Folha 10 2021/22

75. Sejam D um domínio de integridade, $a, b, c, d \in D$ e $u, u' \in \mathcal{U}_D$. Mostre que:

(a) $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$;

(b) $a \mid b \Leftrightarrow au \mid b$;

(c) $a \mid b \Leftrightarrow au \mid bu'$;

(d) $a \mid b,\ c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$;

(e) $a \mid b,\ a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$;

(f) $a \mid b,\ b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

76. Sejam D um domínio de integridade e α a relação binária definida em D por

$$a\ \alpha\ b \Leftrightarrow a \textit{ e } b \textit{ são associados.}$$

Mostre que α é uma relação de equivalência em D e determine a classe de equivalência $[a]_\alpha$, para todo $a \in D$.

77. Sejam D um domínio de integridade e $u \in D$. Mostre que:

(a) $u \in \mathcal{U}_D$ se e só se $u \mid x$, para todo $x \in D$;

(b) $u \in \mathcal{U}_D$ se e só se $(u) = D$.

78. Considere o domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(a) Determine o conjunto das unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(b) Mostre que $1 + 2\sqrt{-5}$ é irredutível em $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(c) Mostre que $1 + 2\sqrt{-5}$ não é um elemento primo em $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(d) Determine $[1 + 2\sqrt{-5}, 3]$.

79. Considere o domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.

(a) Mostre que $2 + \sqrt{-6}$ é irredutível mas não é primo.

(b) Prove que não existe $\mathrm{m.d.c.}(2(2 + \sqrt{-6}), 10)$.

(c) Prove que não existem elementos $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[-6]$ tais que

$$5\alpha + \beta(2 + \sqrt{-6}) = 1.$$

80. Considere o domínio de integridade $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(a) Prove que 2 é irredutível mas não é primo.

(b) Justifique que existe $\mathrm{m.d.c.}(2, 1 + \sqrt{-7})$.

(c) Mostre que não existem elementos $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ tais que

$$2\gamma + \delta(1 + \sqrt{-7}) = 1.$$

81. Sejam D um domínio de integridade e $p, q \in D$ elementos irredutíveis não associados. Mostre que $[p, q] = \mathcal{U}$.