66. Sejam A um anel e I um ideal de A. Prove que:
    (a) os subanéis do anel quociente A/I são todos os anéis quociente B/I, em que B é um subanel de A que contem I;
    (b) os ideais do anel quociente A/I são todos os anéis quociente J/I, em que J é um ideal de A que contém I.

67. Sejam A e B dois anéis com identidade. Prove que o conjunto dos ideais do anel com identidade $A \times B$ é
$$\mathcal{I}(A \times B) = \{I \times J : I \text{ é ideal de } A \text{ e } J \text{ é ideal de } B\}.$$

68. Considere o anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Indique:
    (a) um ideal maximal;
    (b) um ideal primo que não seja maximal;
    (c) um ideal próprio não nulo que não seja primo.

69. Considere os anéis $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e a aplicação $\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $\alpha(m, n) = m$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
    (a) Mostre que α é um epimorfismo de anéis.
    (b) Determine $\mathrm{Nuc}\ \alpha$.

70. Sejam A um anel, I um ideal de A e $\varphi : A \to A/I$ o epimorfismo canónico. Prove que:
    (a) se A_1 é subanel de A, então $\varphi(A_1) = (A_1 + I)/I$;
    (b) se $\overline{B} = B/I$ é subanel de A/I, então $\varphi^{-1}(\overline{B}) = B$.

71. Um anel A diz-se um *anel simples* se não tiver outros ideais para além dos ideais $\{0_A\}$ e A.

    Prove que um anel A é um anel simples se e só se todo o morfismo não nulo de domínio A é um monomorfismo.

72. Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um epimorfismo. Prove que se $u \in A$ é a identidade de A, então $\varphi(u)$ é a identidade de A'.

73. Sejam A um anel, I_1 e I_2 ideais de A e $\varphi : A \longrightarrow A/I_1 \times A/I_2$ a aplicação definida por $\varphi(a) = (a + I_1, a + I_2)$, para todo $a \in A$. Mostre que:
    (a) φ é morfismo de anéis.
    (b) $\mathrm{Nuc}\ \varphi = I_1 \cap I_2$.
    (c) Se $I_1 + I_2 = A$, então,
$$A/(I_1 \cap I_2) \cong A/I_1 \times A/I_2.$$