G3. Algoritmos sobre Grafos Pesados: Estratégia Greedy

[Codeboard de apoio a este módulo: https://codeboard.io/projects/10154]

Árvores Geradoras Mínimas / *Minimum Spanning Trees* [MST]

Seja $G = (V, E)$ um grafo *não-orientado, ligado* (i.e. todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro vértice, não havendo componentes separados), e com pesos.

Uma **árvore geradora** de G é um sub-grafo (V, T) acíclico e ligado de G.

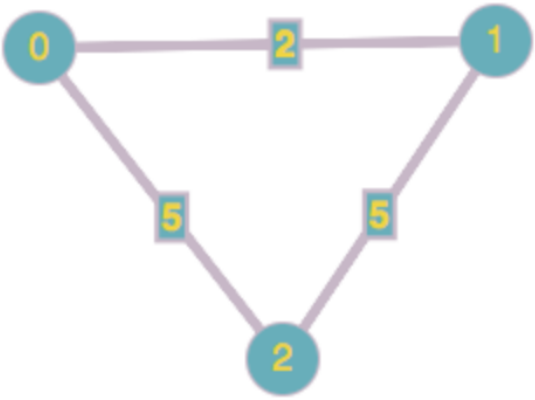
Note-se que, sendo sub-grafo acíclico de um grafo não-orientado, (V, T) é uma *árvore* que contém todos os vértices de G.

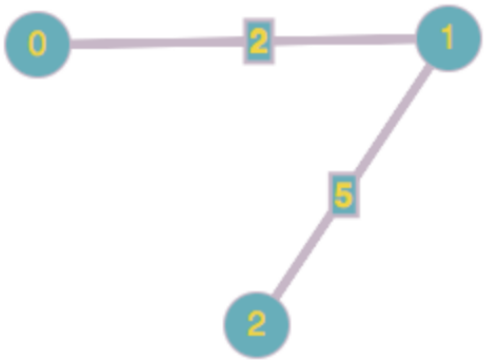
As **árvores geradoras mínimas** de G são aquelas para as quais o peso total $w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$ é mínimo.

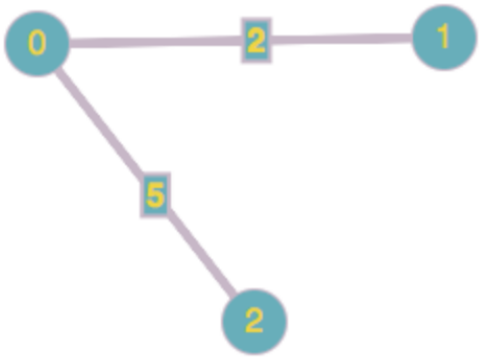
O problema da determinação de uma MST é pois um **problema de optimização**: trata-se de determinar um dos "melhores" objectos que satisfazem um conjunto de restrições (neste caso dadas pela definição de árvore geradora).

Exemplos

O grafo seguinte tem 3 árvores geradoras, das quais duas são mínimas, com peso 7.







No contexto de um grafo correspondente a uma rede de estradas, uma árvore geradora será uma sub-rede das estradas que permite deslocações entre todas as localidades sem redundância, i.e. existirá nesta árvore um único caminho entre cada par de localidades.

Uma árvore geradora mínima será então uma sub-rede que permitirá ligar todas as localidades entre si, com comprimento total mínimo.

Um outro exemplo será a ligação eléctrica de um número de pinos num circuito integrado. Cada fio liga um par de pinos; pretende-se minimizar a quantidade total de cobre utilizado nas ligações. Para isso constrói-se um grafo contendo as ligações possíveis entre pinos, com pesos correspondentes à quantidade de cobre utilizada

em cada ligação. O peso de uma MST corresponde à quantidade mínima de cobre necessária para o conjunto de ligações.

Trata-se de um problema que ocorre em muitos contextos, nomeadamente como sub-problema de outros.

Sub-estrutura Óptima

Diz-se que um problema de optimização possui *sub-estrutura óptima* se uma solução óptima para o problema contém *soluções óptimas para sub-problemas* do problema original.

O problema de determinação de árvores geradoras mínimas possui sub-estrutura óptima, uma vez que cada sub-árvore de uma MST de um grafo G é seguramente uma MST de um sub-grafo de G.

Um problema com estas características pode ser reformulado da seguinte forma:

> *dada uma solução parcial (solução de um sub-problema), pretende-se estendê-la até obter uma solução total (solução do problema original).*

No caso do problema de determinação de MSTs:

> *dada uma MST de um sub-grafo de G, pretende-se estendê-la para obter uma MST de G*

A estratégia greedy para resolução de problemas com sub-estrutura óptima

A estratégia de resolução greedy ("gananciosa") é uma estratégia algorítmica para problemas com sub-estrutura óptima que se caracteriza da seguinte forma:

- É um método **top-down** (tal como a estratégia de divisão e conquista)
- Em cada passo, o algoritmo estende a solução actual efectuando uma escolha local

- Desta forma, o problema é reduzido a um problema mais pequeno, uma vez que a solução local cresce em cada passo, aproximando-se de uma solução para o problema inicial

Enquanto a estratégia de divisão e conquista gera problemas mais pequenos para resolver, e processa depois as respectivas soluções, a estratégia *greedy* transforma o problema num mais pequeno, estendendo localmente uma solução parcial.

A *prova de correcção* de um algoritmo baseado nesta estratégia terá que mostrar que o passo básico é correcto, ou seja:

> *se se parte de uma solução óptima de um sub-problema do problema original, então depois de se estender localmente esta solução teremos ainda uma solução óptima de um sub-problema do problema original.*

Algoritmo de Prim para Construção de Árvores Geradoras Mínimas

Este algoritmo pode ser visto como um algoritmo de travessia, usando uma estratégia alternativa (nem em profundidade nem em largura). Trata-se aqui de uma estratégia **greedy,** que faz uma escolha local guiada pelos pesos das arestas.

Em cada passo do algoritmo partir-se-á de uma MST (V', T') de um sub-grafo de G, e acrescentar-se-á um vértice e uma aresta a esta árvore, obtendo-se uma árvore (V'', T'') que será ainda uma MST de um subgrafo (maior) de G.

Estrutura geral do algoritmo

Considera-se em cada instante da execução o conjunto de vértices de G dividido em 3 conjuntos disjuntos:

1. os vértices da **árvore** de travessia construída até ao momento;
2. os vértices na **orla** (adjacentes aos da árvore);
3. os restantes vértices.

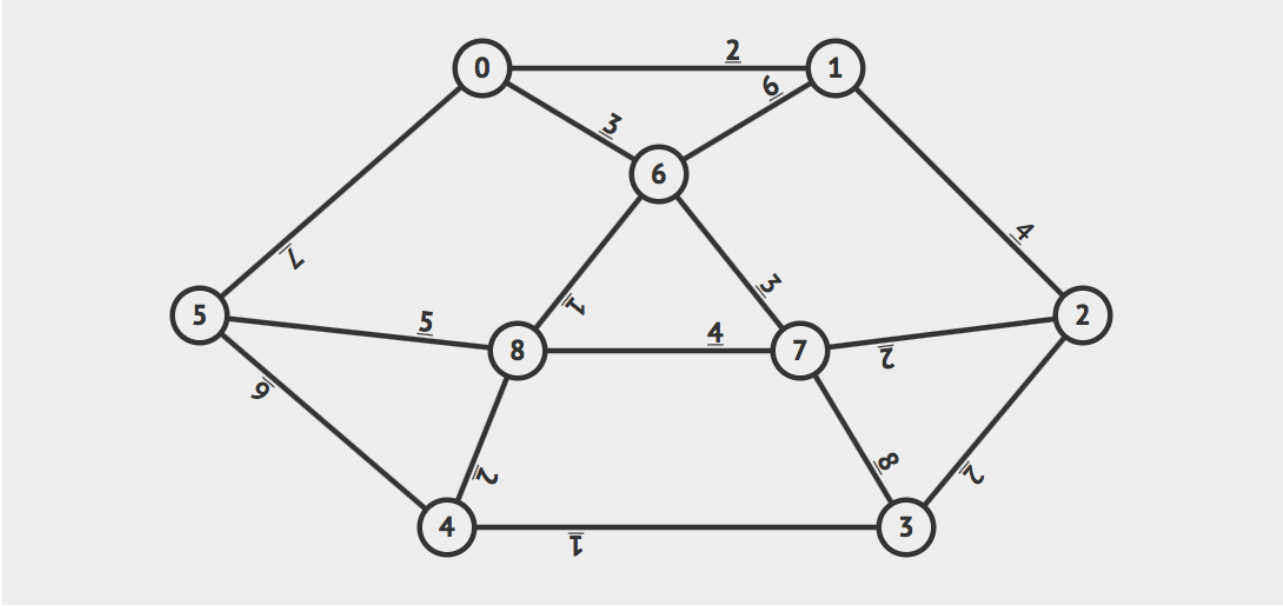
Em cada passo selecciona-se uma aresta (*com origem na **árvore** e destino na **orla***) para acrescentar à árvore. O vértice destino dessa aresta é também acrescentado. É esta a escolha local característica da estratégia *greedy.*

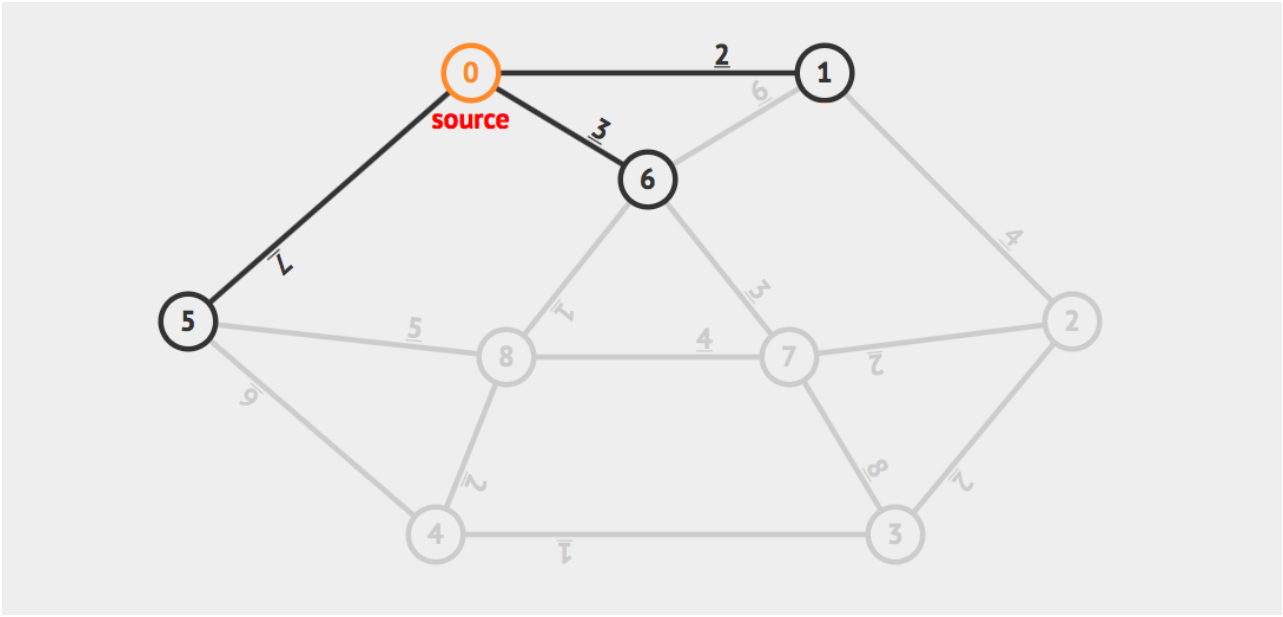
O algoritmo de Prim selecciona sempre o arco com **menor peso** nestas condições.

```
def mst_Prim(g):
  seleccionar vértice arbitrário x para inicio da árvore
  while (árvore não contém todos os vértices):
    actualizar orla em função do novo vértice x
    seleccionar aresta (u,v) de peso mínimo
                entre vértices da árvore e da orla
    x = v
    acrescentar vértice x e aresta (u,x) à árvore
```

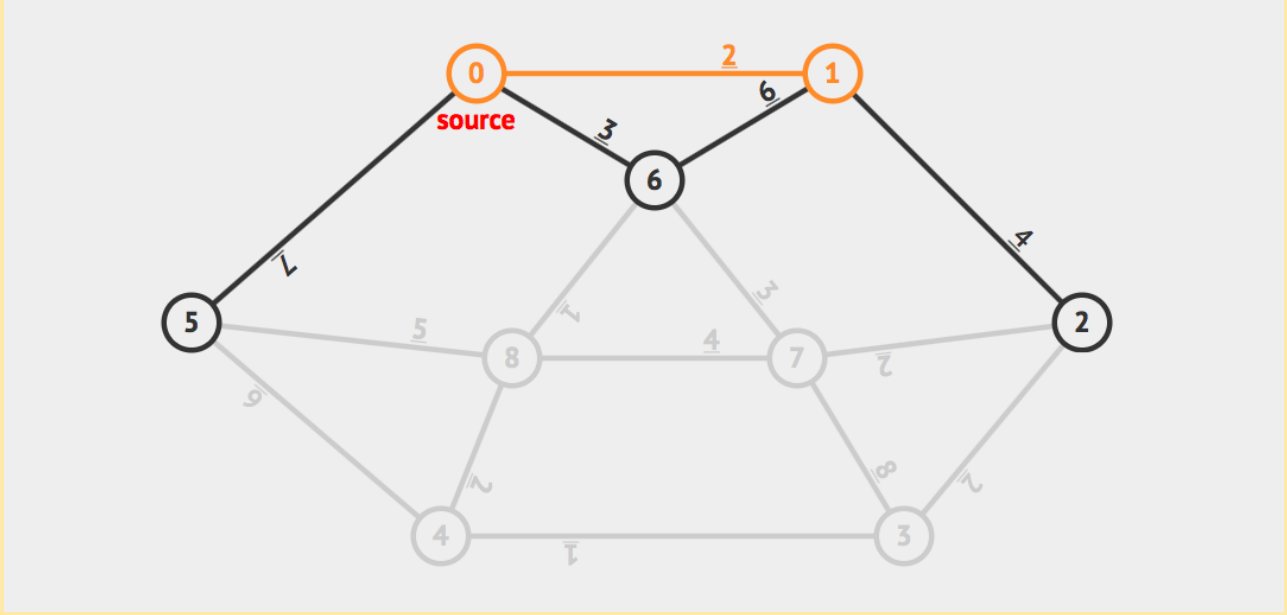
O exemplo seguinte ilustra a necessidade de se associar a cada vértice da orla o seu **arco candidato.** A selecção da aresta a acrescentar à árvore é feita escolhendo o **arco candidato de menor peso**.

Exemplo
[Animação realizada em https://visualgo.net/en/mst]



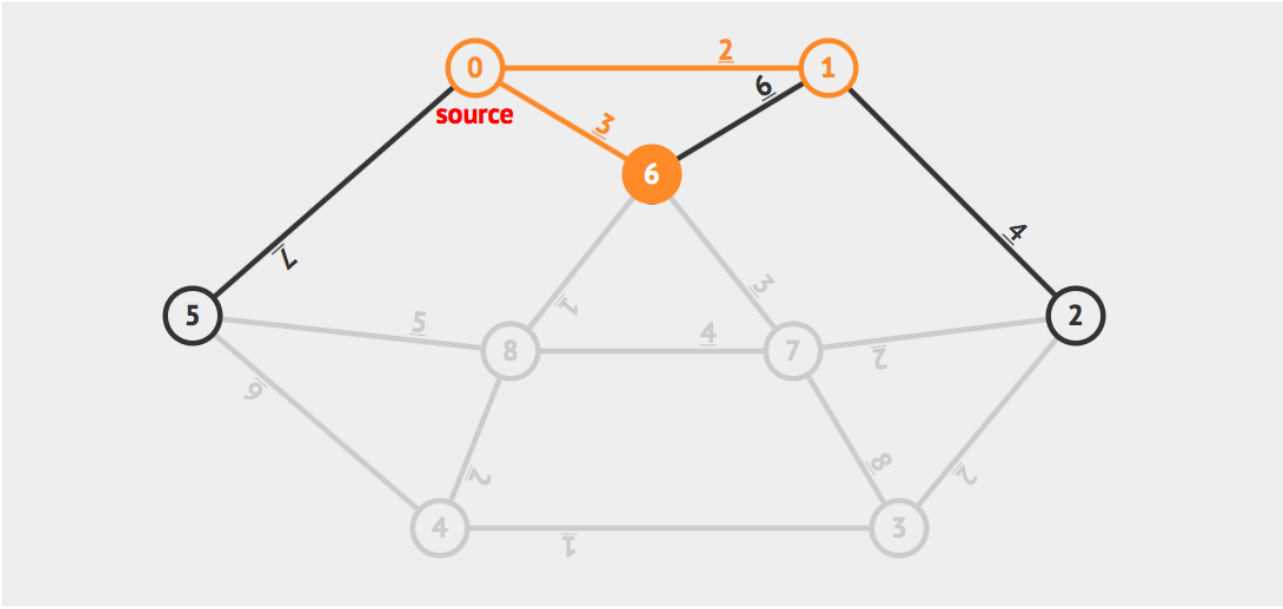


A orla contém neste momento os 3 vértices adjacentes à origem da árvore, 0. Será seleccionado o arco candidato (0, 1), uma vez que tem o menor peso:

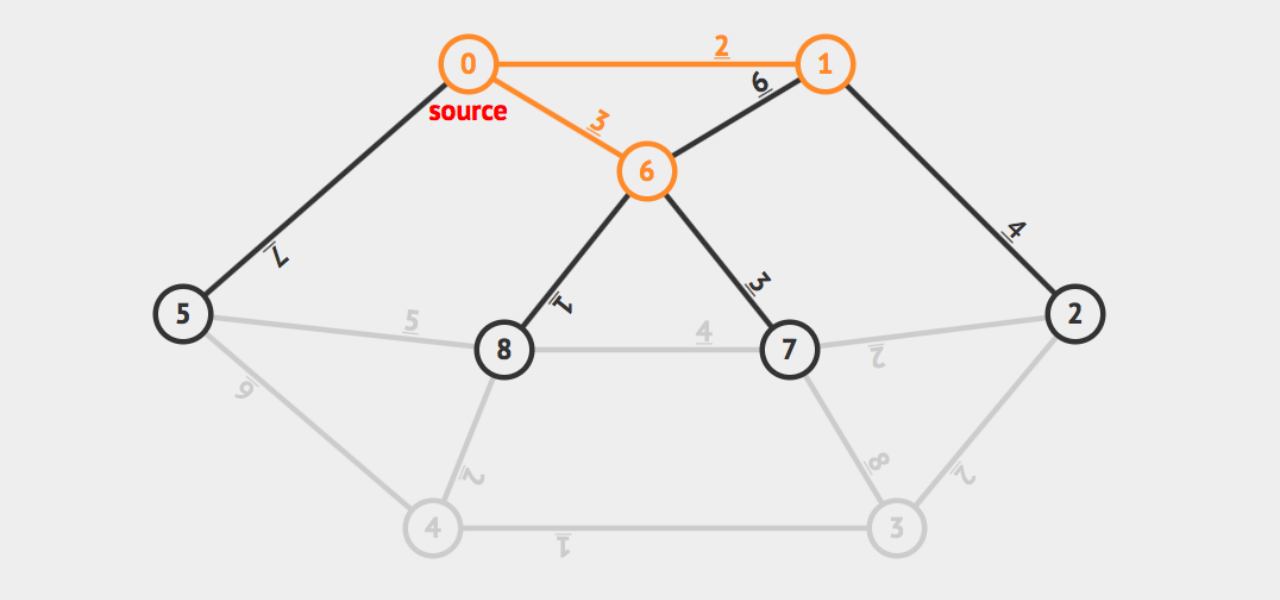


O vértice 2 foi acrescentado à orla, e existem agora dois arcos (0, 6) e (1, 6) que levam ao vértice 6. Mas o **arco candidato** deste vértice é único: naturalmente, (0, 6).

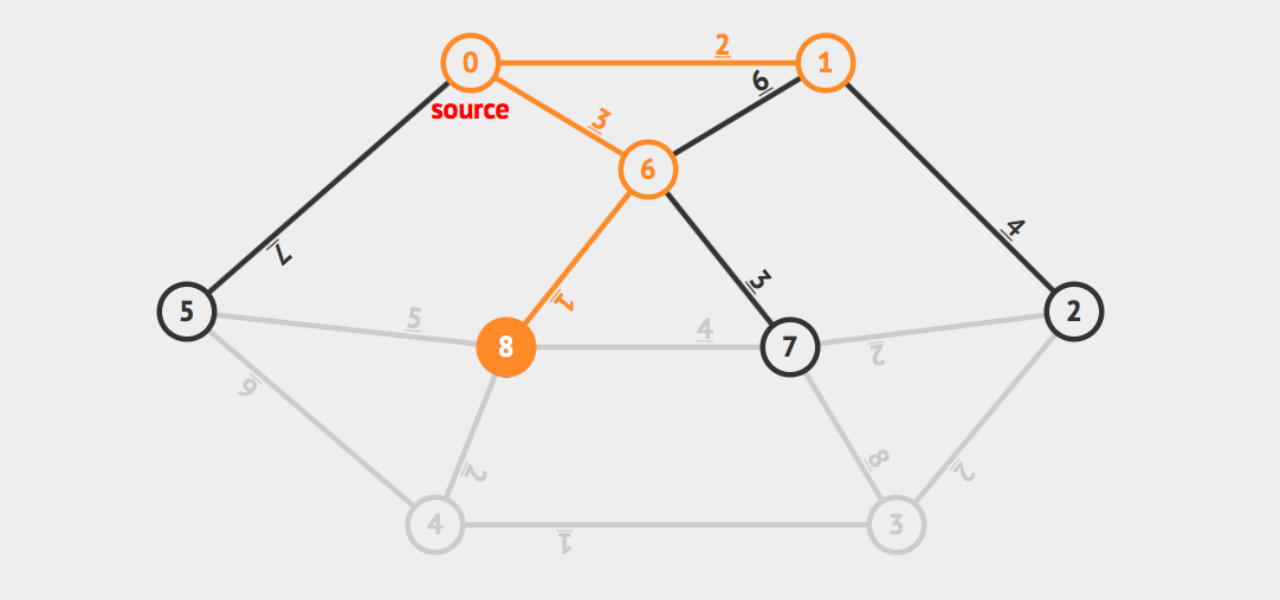
Durante a execução do algoritmo os arcos candidatos (a preto) podem já fazer parte da árvore de travessia construída. No instante acima, teremos `parent[6]==0`, e não `parent[6]==1`.



Depois de acrescentar um vértice à árvore há sempre que actualizar a orla:

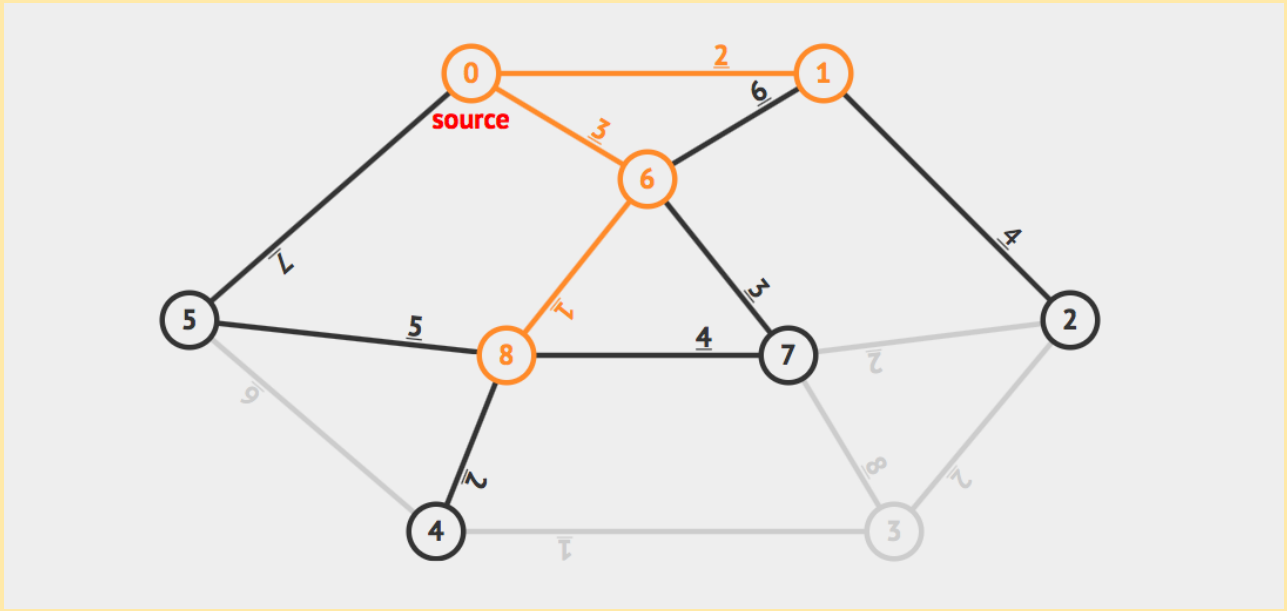


O próximo passo parece óbvio:

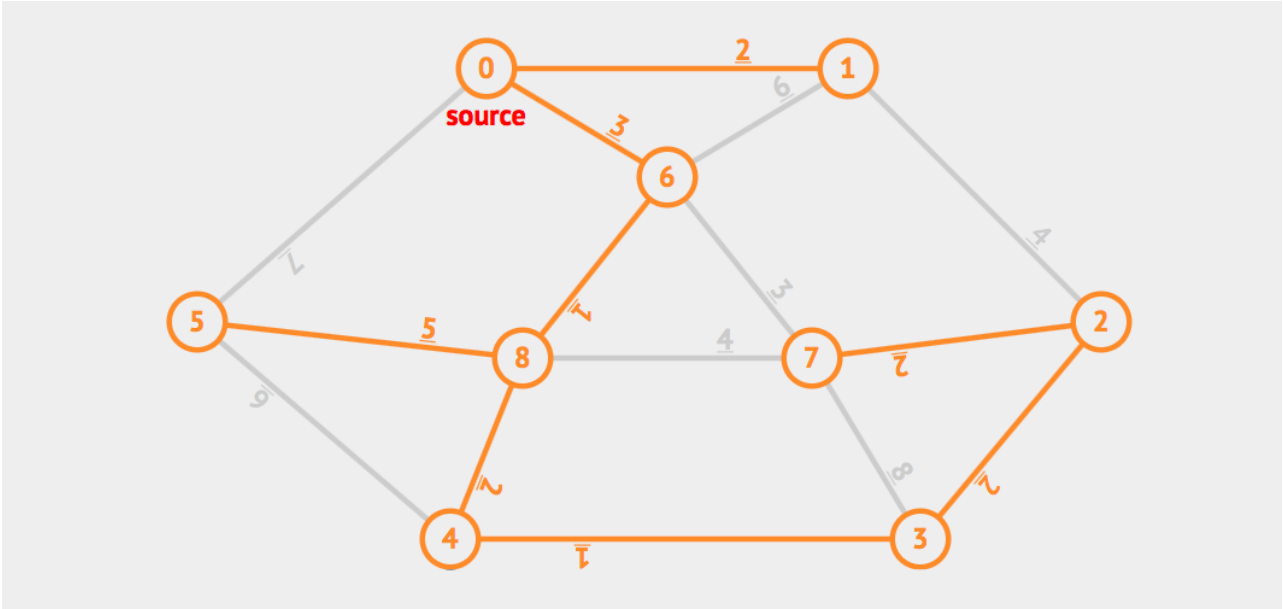


No entanto surge um fenómeno novo: ao actualizar a orla depois de acrescentar o vértice 8, surge um novo arco(8, 5) com destino no vértice 5, que **substitui o arco candidato anterior** (0, 5).

Os arcos candidatos fazem parte da árvore de travessia construída, no entanto, pela razão acima, poderão ser substituídos, não chegando nesse caso a pertencer à MST construída.



Continuando a aplicar este passo básico, obtemos a MST completa, com peso 18:



Algoritmo Detalhado em Python

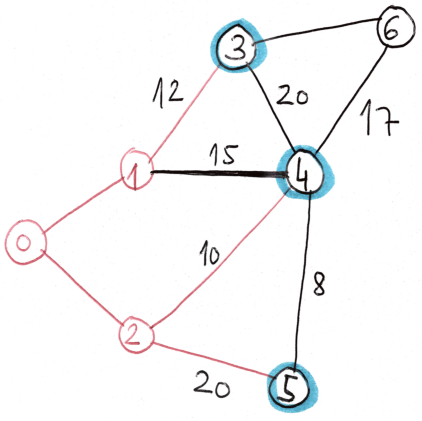
Nota: a representação de grafos em Python como dicionários permite uma sintaxe para acesso ao peso de uma aresta que parece matricial, mas não é: `g[x]` designa a "lista" de adjacências do vértice `x`, mas que é aqui também ela um dicionário da forma **vértice destino ↦ peso**, e não uma lista! Sendo assim `g[x][y]` é o peso da aresta (x, y)

Na implementação em Python representa-se por dicionários a árvore construída, a informação de status dos vértices, e a orla. Esta última em particular será representada por um dicionário cujo domínio são os vértices da orla, que são mapeados para o peso do respectivo arco candidato.

```
def mst_Prim(g):
    fringe = {}
    status = {}
    for i in g:
        status[i] = 'UNSEEN'
    edgeCount = 0

    x = 0;
    status[x] = 'INTREE'
    parent[x] = -1

    while (edgeCount < len(g)-1):
        for y in g[x]:
            wxy = g[x][y]            # weight of edge (x,y)
            if status[y] == 'UNSEEN':
                # add y to fringe with candidate edge (x,y)
                status[y] = 'FRINGE'
                parent[y] = x
                fringe[y] = wxy     # dictionary insertion
            elif status[y] == 'FRINGE' and  wxy < fringe[y]:
                # replace candidate edge of y by (x,y)
```

```
                parent[y] = x
                fringe[y] = wxy      # dictionary update

        # are we blocked? (non-connected graph)

        if len(fringe) == 0:
            return False

        # select next candidate edge and vertex;
        # remove them from fringe and add to tree
        x = min(fringe, key=lambda x:fringe[x])
        del fringe[x]
        status[x] = 'INTREE'
        edgeCount += 1

    return True
```

Vejamos detalhadamente um exemplo de execução do passo básico do algoritmo.



status[0] = status[1] = status[2] = INTREE
status[3] = status[4] = status[5] = FRINGE
status[6] = UNSEEN

parent[1] = parent[2] = 0 (definitivos)
parent[3] = 1 and parent[4] = parent[5] = 2 (orla)

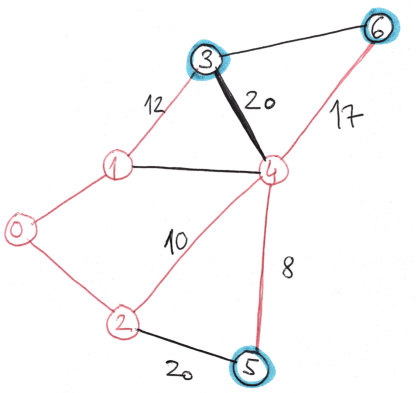
fringe[3] = 12 fringe[4] = 10 fringe[5] = 20

a aresta (1,4) não é um arco candidato!

Será seleccionado o vértice 4 para ser acrescentado à árvore, e serão percorridos os seus adjacentes:

- 3 já pertencia à orla, mas não haverá alteração do arco candidato (20 > 12)

- 5 já pertencia à orla, e haverá alteração do arco candidato (8 < 20)
- 6 não pertencia à orla, passará a pertencer, com arco candidato (4,6)



Alterações:
status[4] = INTREE
status[6] = FRINGE

parent[6] = 4 fringe[6] = 17

parent[5] = 4 fringe[5] = 8

Análise

O tempo de execução está claramente em $\Omega(|V| + |E|)$, uma vez que a estrutura básica do algoritmo é a de uma travessia (percorre todas as listas de adjacências). No entanto, este algoritmo executa outras operações potencialmente mais pesadas:

1. Em cada iteração do ciclo `while`, i.e. $|V|$ vezes, é feita a selecção do arco candidato de menor peso, e removido da orla o respectivo vértice

2. Em cada iteração dos ciclos `for`, i.e. $|E|$ vezes, pode ser feita uma das seguintes coisas:
   a. é acrescentado um nó à orla, ou
   b. é alterado o peso do arco candidato de um nó da orla

Tabela de *hash*
Se a orla for implementada como no código Python acima, por um dicionário (tabela de *hash* sobre um vector dinâmico), as operações de inserção/alteração do peso são executadas em tempo (tendencialmente) constante, mas a operação de selecção do

mínimo obriga a percorrer todos os vértices da orla, sendo executada em tempo linear.
O pior caso ocorrerá quando o primeiro vértice está ligado a todos os outros, tendo a orla sempre tamanho máximo, e teremos $T(N) = \mathrm{O}(|V|^2 + |E|) = \mathrm{O}(|V|^2)$, no caso de um grafo simples .

Lista ligada
Uma alternativa semelhante em termos de performance é implementar a orla como uma lista ligada (*não-ordenada*) contendo os vértices. Neste caso, para possibilitar que a alteração do peso do arco candidato seja feita em tempo constante, será preferível não incluir estes pesos na lista (orla), mas sim manter um *array* adicional indexado pelos vértices, e que associa a cada um o peso do respectivo arco candidato (este *array* pode ser visto como um complemento de *parent* que guarda o peso de todas as arestas da árvore construída). A selecção/remoção de mínimo exigirá no pior caso tempo linear, pelo que teremos ainda
$T(N) = \mathrm{O}(|V|^2 + |E|) = \mathrm{O}(|V|^2)$.

Fila com Prioridades / *Min-heap*
A orla pode ainda ser implementada por uma *Fila* de vértices, tendo os pesos dos arcos candidatos como *prioridades*. Neste caso as operações de inserção, alteração de peso, e remoção do mínimo serão todas executadas em tempo logarítmico, pelo que teremos $T(N) = \mathrm{O}(|V| . \log |V| + |E| . \log |V|) = \mathrm{O}(|E| . \log |V|)$

EXERCÍCIO
[https://codeboard.io/projects/10154]
Com base nas definições fornecidas no projecto Codeboard, implemente em C o algoritmo de Prim, escolhendo para a orla uma das estruturas sugeridas acima.

Caminhos Mais Curtos

O problema da determinação de caminhos mais curtos num grafo pesado é uma generalização do mesmo problema em grafos sem pesos. Pretende-se agora

minimizar não o número de arestas dos caminhos, mas sim o *peso* (comprimento, na analogia geográfica) desses caminhos.

A definição de peso de um caminho $P = v_0, v_1, \dots v_k$ é a esperada:

$$w(P) = \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

Algumas notas:

- O problema está intimamente ligado com o do cálculo da *distância* entre dois vértices, que é precisamente definida como o peso do caminho mais curto.
- O problema que consideraremos aqui é o da construção de todos os caminhos mais curtos com origem num determinado vértice e destino em todos os vértices alcançáveis a partir dele, conhecido por ***single-source sortest paths***.
- O problema simétrico, ***single-destination sortest paths,*** pode ser reduzido a este sobre o grafo simétrico do original.
- O problema ***single-pair sortest paths*** (caminho mais curto ponto a ponto) é naturalmente um problema mais simples, mas não existe um algoritmo específico: resolve-se utilizando um algoritmo de ***single-source sortest paths*** (podendo a sua execução ser interrompida antecipadamente).

Algoritmo de Dijkstra para o problema *single-source sortest paths*

Trata-se de um algoritmo extremamente parecido com o de Prim, igualmente baseado numa travessia guiada por uma estratégia específica, e com o mesmo tempo assimptótico de execução.

A árvore de travessia construída, com origem num vértice s, contém todos os caminhos mais curtos com origem em s e destino em vértices alcançáveis a partir de s.

As alterações a introduzir são as seguintes:

- À semelhança do que acontece no algoritmo de travessia em largura, utiliza-se um vector dist[] para armazenar a distância desde a origem até aos vértices da árvore de travessia
  - $\text{dist}[y] = \delta(s, y)$ se y pertence à árvore de travessia

  neste caso o valor $\text{dist}[y]$ não se alterará mais durante a execução do algoritmo, contém já o valor real da distância entre s e y

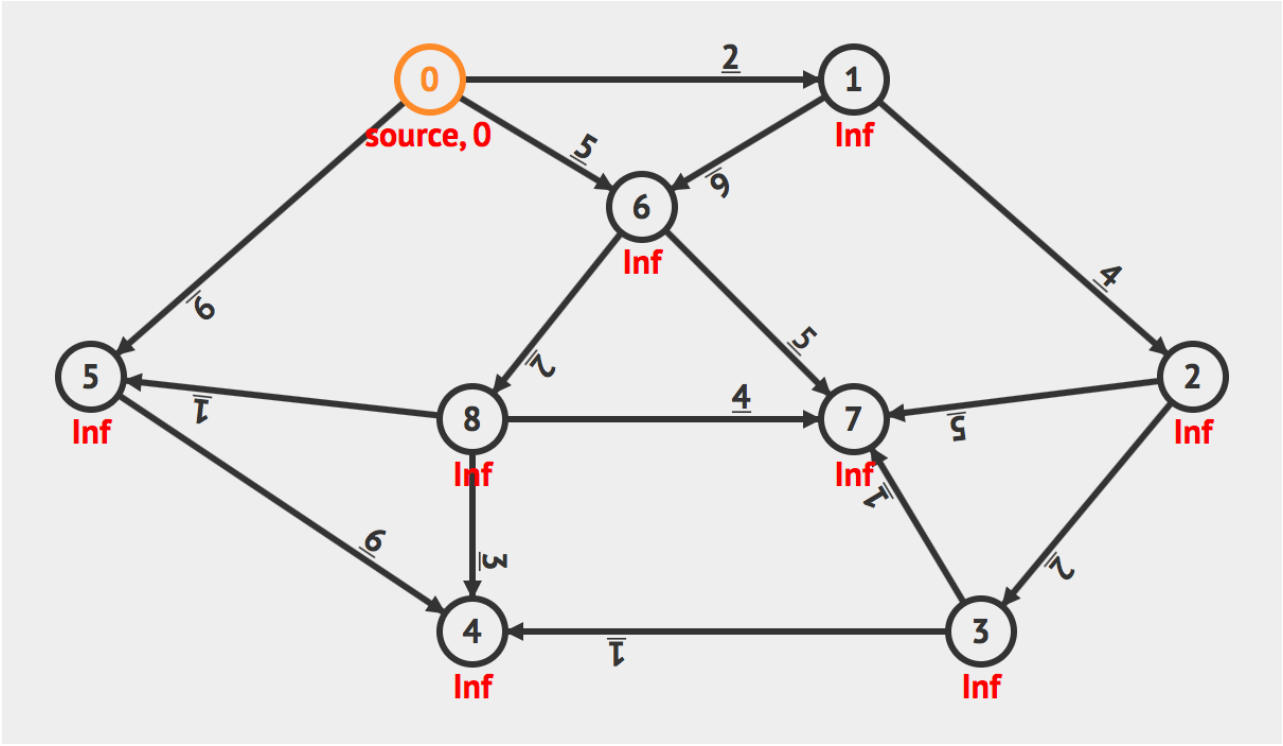
- Mas tal como acontece com o vector parent[], o vector dist[] estará definido também para os vértices da orla:
  - $\text{dist}[z] = \delta(s, y) + w(y, z)$ se z está na orla e (y, z) é o seu arco candidato

  neste caso esta informação é provisória e poderá ser modificada caso se altere o arco candidato

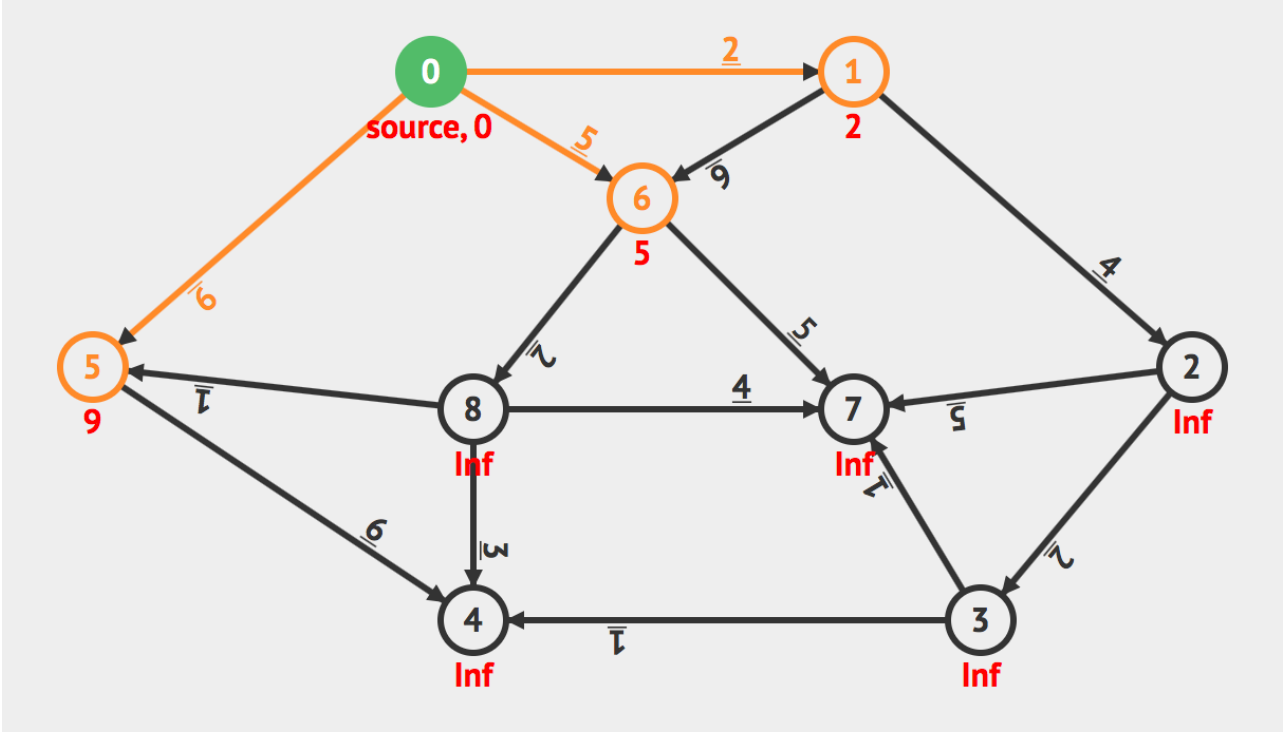
- O critério de selecção do vértice da orla a acrescentar à árvore em casa passo é simplesmente a minimização do valor $\text{dist}[z]$, ou seja, *acrescenta-se o vértice cuja distância desde a origem é a menor*.

Exemplo

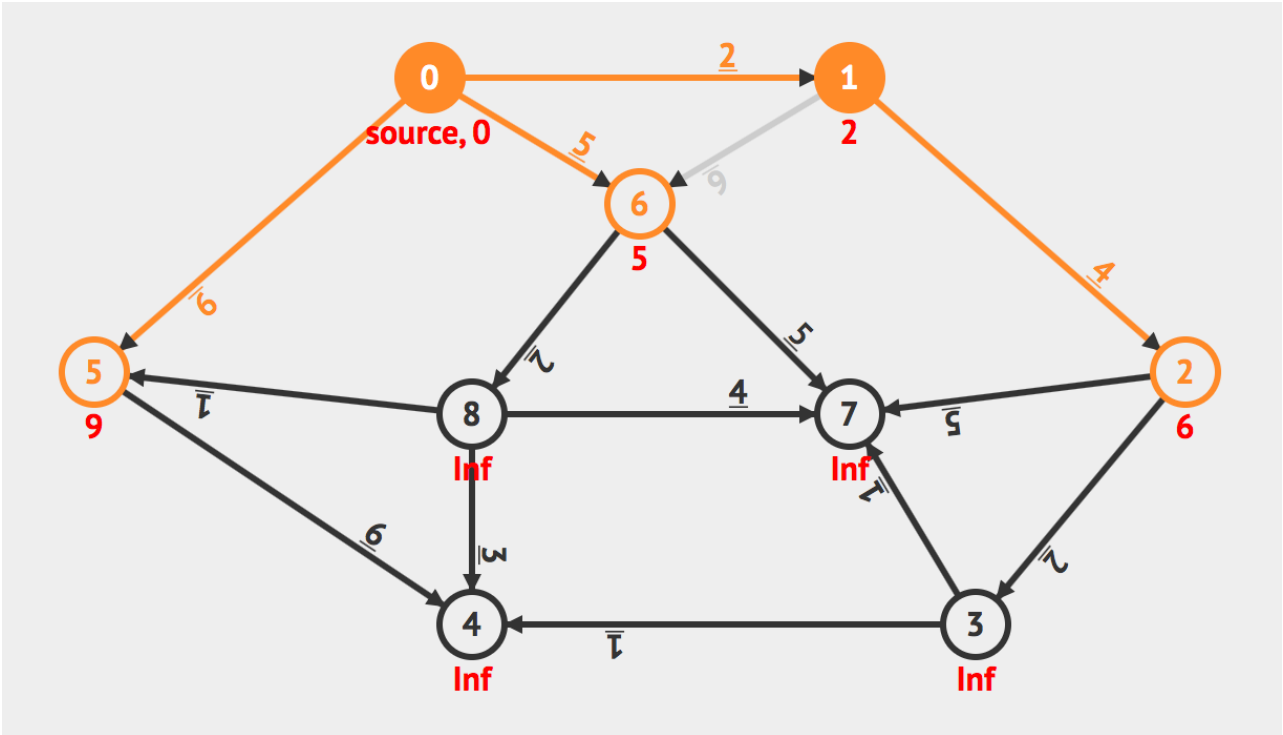
[Animação construída em https://visualgo.net/en/sssp]

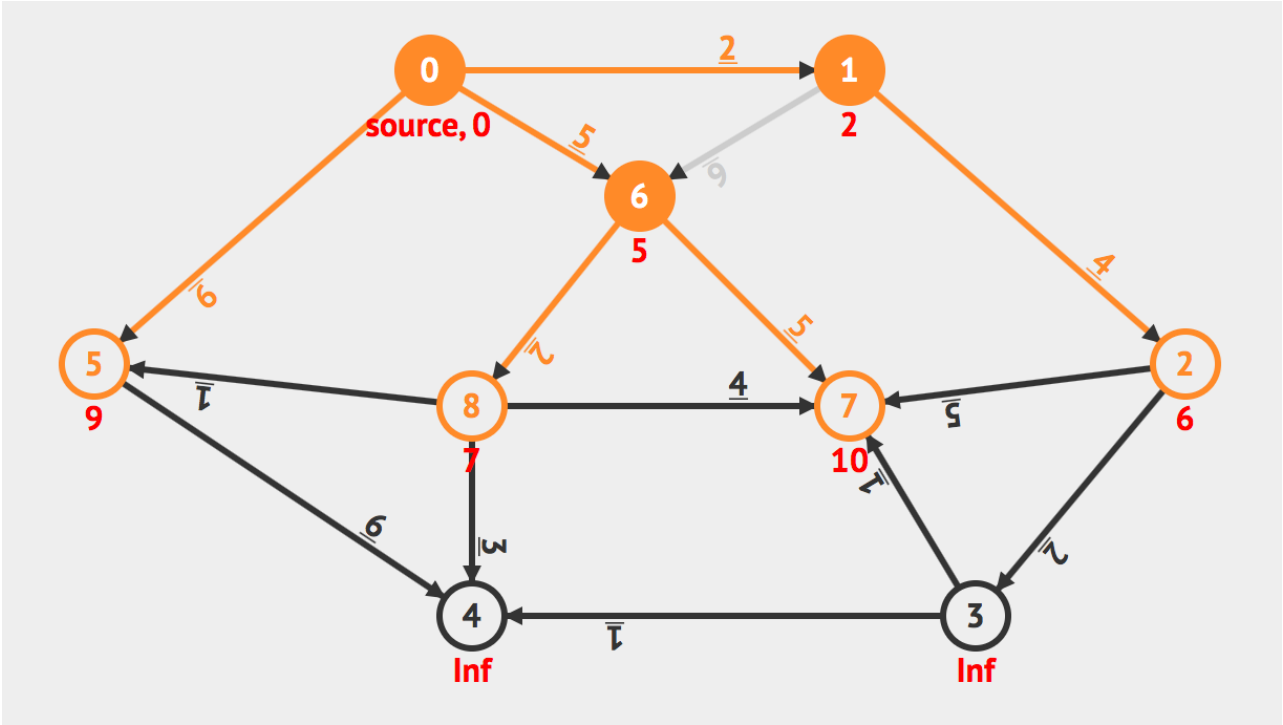


Anotaremos (a vermelho) nos vértices da árvore e da orla a distância desde a raíz até cada um deles. Para os vértices da orla estes valores não são definitivos, podendo ser alterados se houver mudança do arco candidato.

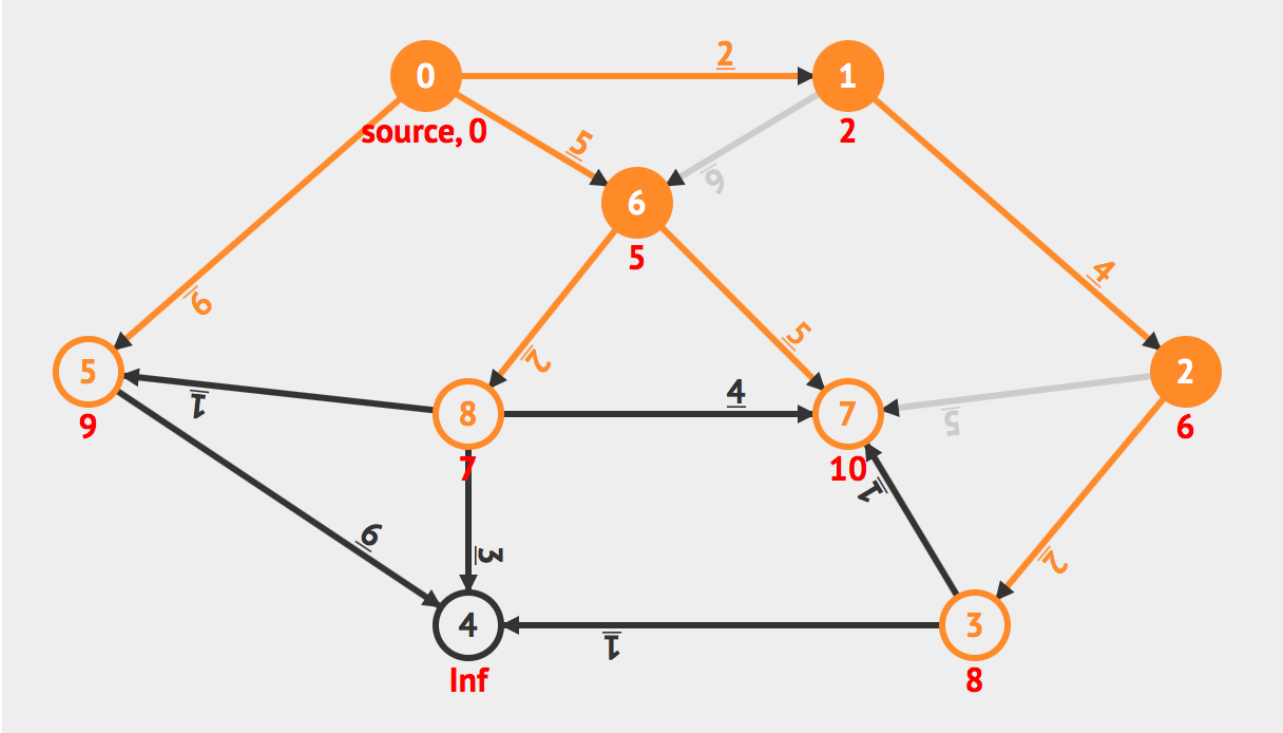


Será escolhido o vértice 1. Note-se que apesar de haver duas arestas que levam ao vértice 6, não haverá alteração do arco candidato, uma vez que 2+6 > 5.

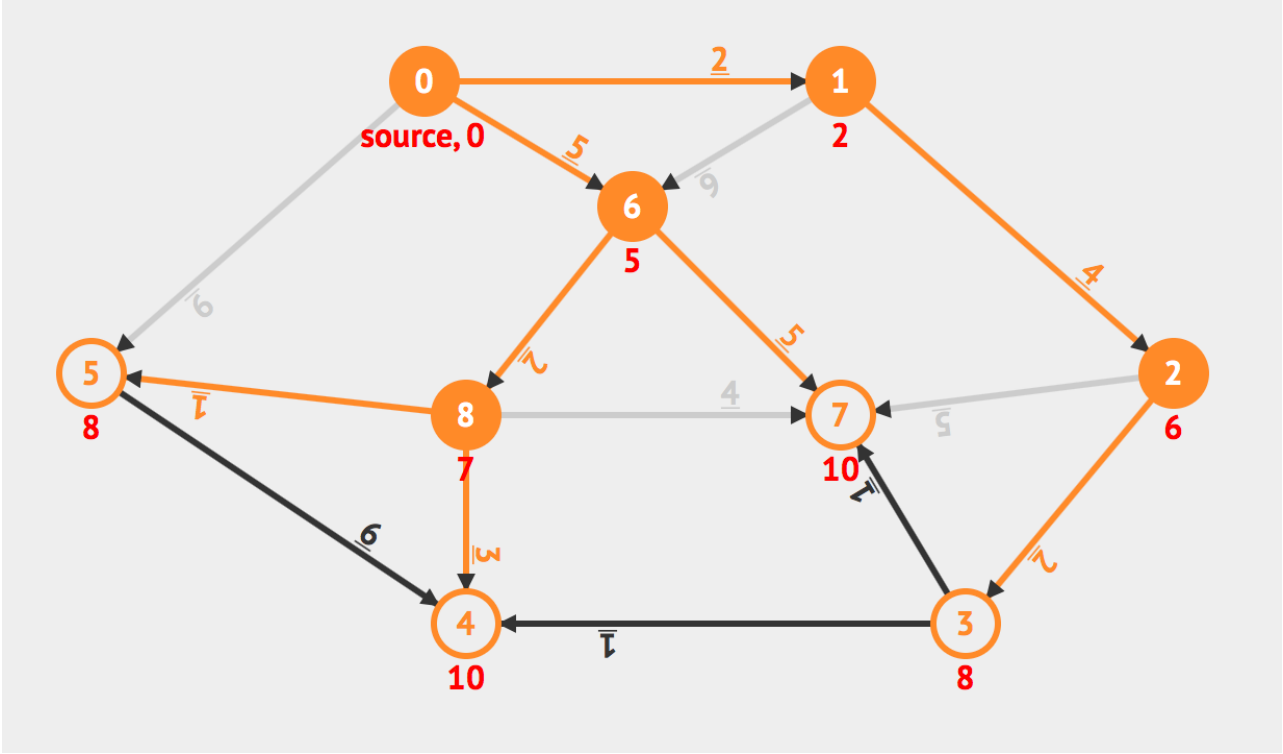




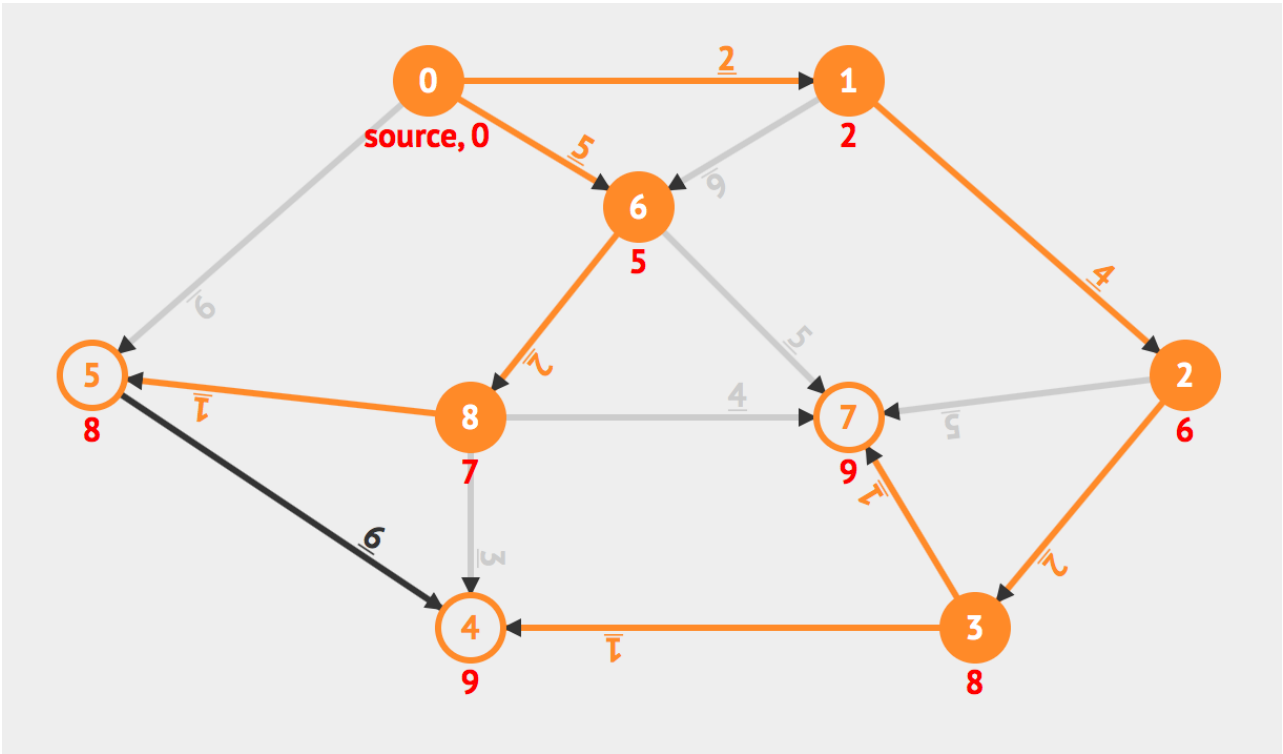
Note-se que, ao acrescentar vértices à orla, a distância desde a raíz é calculada somando a distância da origem ao pai com o peso das arestas acrescentadas à árvore.
No próximo passo, a distância até 8 será 5+2=7, e até 7 será 5+5=10.



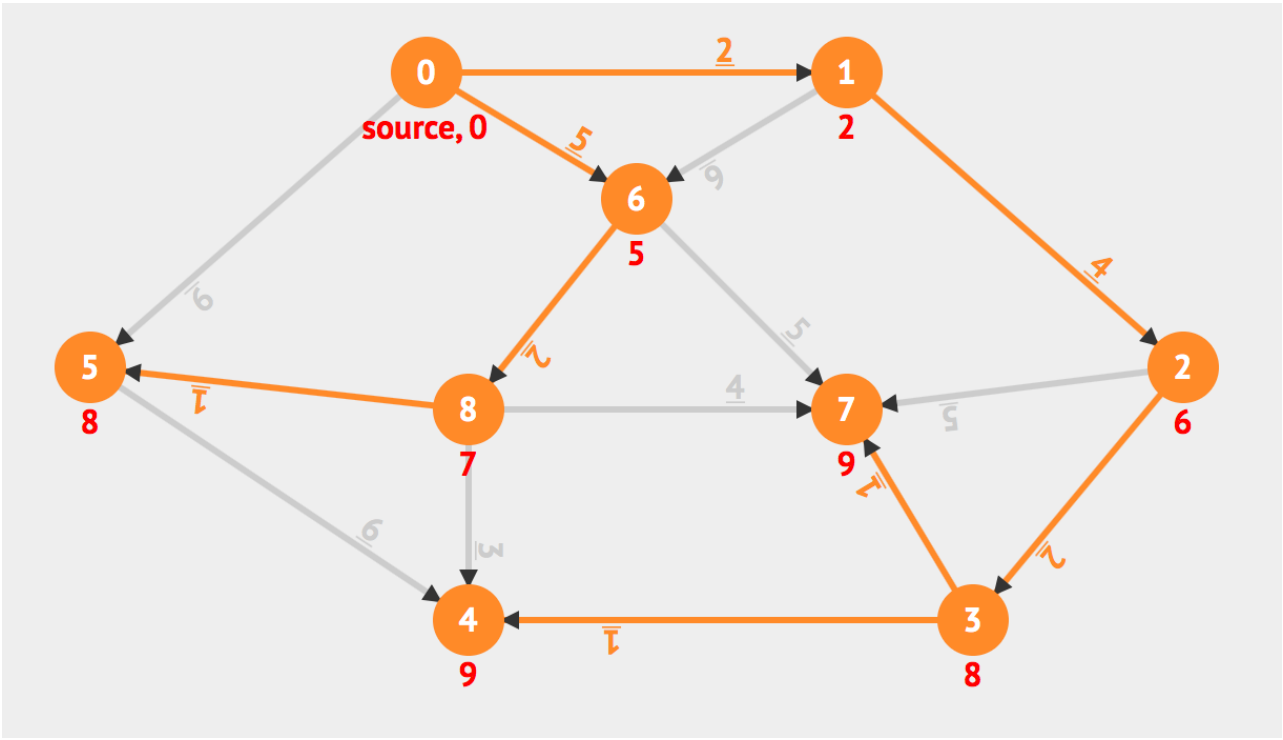
No próximo passo acrescentaremos o vértice 8 à árvore, o que levará a uma alteração do arco candidato de 5, uma vez que 7+1 < 9. Também a distância desde a raiz, anotada no vértice, será alterada.



No próximo passo haverá nova alteração de arco candidato e distância, desta vez do vértice 7.



Os restantes passos não trazem novidades. A árvore de travessia construída contém todos os caminhos mais curtos com origem no vértice 0.



Algoritmo Detalhado em Python

```
def sp_Dijkstra(g, s):
    fringe = {}
    status = {}
    ## NEW IN DIJKSTRA
    dist = {}
    for i in g:
        status[i] = 'UNSEEN'
    edgeCount = 0

    x = s;
```

```
    status[x] = 'INTREE'
    parent[x] = -1
    ## NEW IN DIJKSTRA
    dist[x] = 0

    while (edgeCount < len(g)-1):
        for y in g[x]:
            wxy = g[x][y]
            if status[y] == 'UNSEEN':
                # add y to fringe with candidate edge (x,y)
                status[y] = 'FRINGE'
                parent[y] = x
                fringe[y] = wxy
                ## NEW IN DIJKSTRA
                dist[y] = dist[x] + wxy
            ## MODIFIED FOR DIJKSTRA
            elif (status[y] == 'FRINGE'
            and  dist[x] + wxy < dist[y]):
                # replace candidate edge of y by (x,y)
                parent[y] = x
                fringe[y] = wxy
                ## NEW IN DIJKSTRA ##
                dist[y] = dist[x] + wxy

        # are we blocked? (non-connected graph)

        if len(fringe) == 0:
            return False

        # select next candidate edge and vertex
```

```
        # remove them from fringe and add to tree
        ## MODIFIED FOR DIJKSTRA
        x = min(fringe, key=lambda x:dist[x])
        del fringe[x]
        status[x] = 'INTREE'
        edgeCount += 1

    return True
```

Código Python para teste dos algoritmos

Prim:

```
graph = {
    0: { 1: 2, 5: 7, 6: 3 },
    1: { 0: 2, 2: 4, 6: 6 },
    2: { 1: 4, 3: 2, 7: 2 },
    3: { 2: 2, 4: 1, 7: 8 },
    4: { 3: 1, 5: 6, 8: 2 },
    5: { 0: 7, 4: 6, 8: 5 },
    6: { 0: 3, 1: 6, 7: 3, 8:1 },
    7: { 2: 2, 3: 8, 6: 3, 8:4 },
    8: { 4: 2, 5: 5, 6: 1, 7:4 }
    }


def printGraph(g):
    for i in g:
        print"[%s]"%(i),
```

```
        for j in sorted(g[i].keys()):
            print "-> (%s, %s)"%(j,g[i][j]),
        print


printGraph(graph)
print

parent = {}
ok = mst_Prim(graph)
if ok:
    sum = 0;
    print "\nMST:\n",
    for i in graph:
        if parent[i]>=0 :
            print"%1s--%1s"%(parent[i], i)
            sum += graph[i][parent[i]]
    print "Total weight = ", sum
else:
    print "UNCONECTED GRAPH, CANNOT BUILD MST!"
```

Dijkstra:

```
graph = {
    0: { 1: 2, 5: 9, 6: 5 },
    1: { 2: 4, 6: 6 },
    2: { 3: 2, 7: 5 },
    3: { 4: 1, 7: 1 },
    4: { },
    5: { 4: 6 },
```

```
    6: { 7: 5, 8: 2 },
    7: { },
    8: { 4: 3, 5: 1 }
    }


def printGraph(g):
    for i in g:
        print"[%s]"%(i),
        for j in sorted(g[i].keys()):
            print "-> (%s, %s)"%(j,g[i][j]),
        print


printGraph(graph)
print

parent = {}
ok = sp_Dijkstra(graph, 0)
if ok:
    sum = 0;
    print "\nShortest Paths Tree:\n",
    for i in graph:
        if parent[i]>=0 :
            print"%1s--%1s"%(parent[i], i)
else:
    print "UNCONECTED GRAPH, CANNOT REACH ALL VERTICES!"
```