Ficha 3

Algoritmos e Complexidade

Estruturas de Dados

1 Árvores binárias de procura

1. Considere a seguinte definição de um tipo para representar árvores binárias de procura (BST).

```
typedef struct btree {
   int value;
   struct btree *left, *right;
} Node, *BTree;
```

Apresente definições em C para resolver cada um dos problemas abaixo. Para cada função:

- Apresente relações de recorrência que traduzam o comportamento da função para dois casos extremos: (1) a árvore está perfeitamente desequilibrada (i.e., o número de nodos da árvore é igual à altura da árvore) e (2) a árvore está equilibrada (i.e., a altura da árvore corresponde ao logaritmo do numero de nodos).
- Identifique o melhor e o pior caso do comportamento da função, e diga qual o tempo de execução assimptótico nesse caso.

(a) A função `int size (BTree)` calcula o número de nodos de uma BST.

(b) A função `int altura (BTree)` calcula a altura de uma árvore.

(c) A função `BTree add (Btreem int)` adiciona um elemento a uma árvore.

(d) A função `int search (BTree, int)` determina se um inteiro ocorre numa dada árvore.

(e) A função `int max (BTree)` determina o maior elemento de uma árvore (não vazia).

2. Uma árvore binária diz-se balanceada se a diferença de pesos entre as suas sub-árvores não for superior a 1. A seguinte função determina se uma árvore binária está ou não balanceada.

```
int balanceada (BTree a) {
    if (a) {
        l = altura (a->left);
        r = altura (a->right);
        return ((abs (l-r) <= 1)     &&
                balanceada (a->left) &&
                balanceada (a->right));
       }
    else return 1;
   }
```

   (a) Identifique o melhor e pior caso do tempo de execução desta função.

   (b) Para cada um dos casos identificados, apresente uma relação de recorrência que traduza o tempo de execução desta função em função do tamanho da árvore. Em ambos os casos apresente uma solução dessa recorrência.

   (c) Uma alternativa para melhorar o comportamento da função acima consiste em usar uma função auxiliar que, além de determinar se uma dada árvore está balanceada, calcula a sua altura.

```
int balanceada (BTree a) {
    int p;
    return (balanceadaAux (a, &p));
   }

int balanceadaAux (BTree a, int *p) {
    int l, r;
    ...
   }
```

   Complete a definição acima de forma a garantir que no melhor e pior caso, a função executa em tempo linear ao tamanho da árvore. Justifique a sua solução apresentando recorrências que traduzam o comportamento da função nesses casos extremos.

2 Filas com prioridades e *Heaps*

Considere o seguinte *header file* para **buffers** de inteiros.

```
typedef struct buffer *Buffer;

Buffer init   (void);         // inicia e aloca espaço
int    empty  (Buffer);       // testa se esta vazio
int    add    (Buffer, int);  // acrescenta elemento
int    next   (Buffer, int *);// proximo a sair
int    remove (Buffer, int *);// remove proximo
```

Duas instanciações bem conhecidas deste conceito são as *pilhas* e as *filas de espera* (ver Secção A). Uma outra são as *filas com prioridades*, em que o próximo elemento a sair é sempre o menor (ou maior) elemento que se encontra no *buffer*.

1. Considere duas implementações possíveis de uma fila com prioridades:

   A os elementos do *buffer* são armazenados sequencialmente por ordem crescente;

   B os elementos do *buffer* são armazenados por ordem de chegada;

   Para cada uma das implementações sugeridas

   (a) analise (informalmente) a complexidade das funções de inserção e remoção no melhor e pior casos (identifique esses casos).

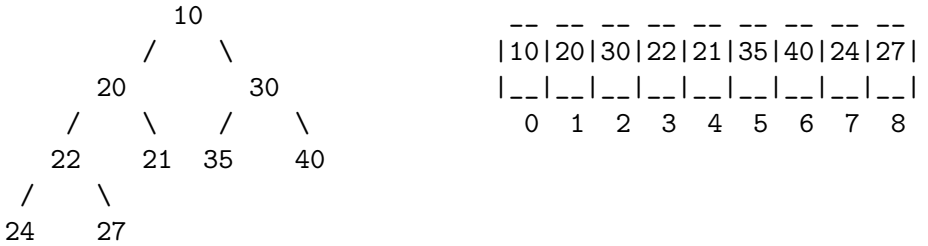
   (b) Considere agora uma sequência de `N` instruções de inserção e remoção que, partindo do *buffer* vazio acabam com o *buffer* também vazio (e por isso mesmo a sequência tem de ter tantas remoções como inserções). Identifique a melhor e a pior destas sequências e calcule, para cada uma destas, o custo da sequência.

2. Uma implementação alternativa é baseada numa estrutura de dados conhecida como *(min)-heap*, uma árvore binária que satisfaz duas propriedades:

   - *shape property*: a árvore é completa, ou quasi-completa.
   - *(min)-heap property*: o conteúdo de cada nó é menor ou igual que o conteúdo dos seus descendentes (não havendo, no entanto, qualquer relação de ordem entre os conteúdos das duas sub-árvores de um mesmo nó).

   As heaps têm assim uma implementação muito vantajosa em array, em que a árvore vai sendo disposta por níveis ao longo do array (da esquerda para a direita). O acesso ao nó pai e aos nós filhos é feito de forma directa por aritmética de índices.

   Exemplo de uma *min-heap* e sua representação em array:



Considere o seguinte *header file* para **min-heaps** de inteiros.

```
#define PARENT(i)  (i-1)/2     // o indice do array começa em 0
#define LEFT(i)    2*i + 1
#define RIGHT(i)   2*i + 2

typedef int Elem;  // elementos da heap.

typedef struct {
 int   size;
 int   used;
 Elem  *values;
} Heap;

Heap *newHeap  (int size);
int  insertHeap(Heap *h, Elem x);
void bubbleUp  (Elem h[], int i);
int  extractMin(Heap *h, Elem *x);
void bubbleDown(Elem h[], int N);
```

(a) Suponha que tem uma *min-heap* com tamanho (`size`) 100, com 10 elementos (i.e., `used` tem o valor 10) e que as 10 primeiras posições do vector `values` têm os valores `4, 10, 21, 45, 13, 25, 22, 60, 100, 20`.

Diga qual o conteúdo desse vector após a inserção do número 6. Justifique a sua resposta desenhando as árvores correspondentes à *min-heap* antes e depois da referida inserção.

(b) Defina uma função `int minHeapOK (Heap h)` que testa se a min-heap está correctamente construída (i.e., se todos os caminhos da raíz até uma folha são sequências crescentes). Certifique-se que a solução que apresentou tem um custo linear no tamanho da input.

(c) Apresente uma implementação das operações indicadas e analise o seu tempo de execução.

i. `newHeap` cria uma nova heap vazia com uma dada capacidade.

ii. `insertHeap` insere um elemento na heap.

iii. `bubbleUp` função auxiliar de inserção: dada uma posição da heap com um novo valor que possivelmente viola a propriedade da heap, propaga esse valor gradualmente para cima.

iv. `extractMin` retira o mínimo da heap.

v. `bubbleDown` função auxiliar de remoção que dado o array em que uma min-heap está armazenada e em que a raíz (indíce 0) possivelmente viola a propriedade da heap, propaga esse valor gradualmente para baixo.

3 Tabelas de Hash

1. Considere uma tabela de *hash* (para implementar um conjunto de inteiros) com tratamento de colisões por *open addressing* (com *linear probing*) e em que a remoção de chaves é feita usando uma marca (de apagado). Suponha que existem definidas as funções `add (int k)`, `remove (int k)`, e `exists (int k)`, sendo que esta última devolve verdadeiro/falso.

   Suponha ainda que o tamanho da tabela é 7 e que a função de *hash* é `hash(x) = x % 7`. Apresente a evolução da tabela quando, a partir de uma tabela inicialmente vazia, se executa a seguinte sequência de operações:

   ```
   add 15; add 25; add 9; add 1; rem 9; add 38; rem 15; add 6; add 10; add 19
   ```

2. Considere uma tabela de hash implementada sobre um array de tamanho 7 para armazenar números inteiros. A função de hash utilizada é $h(x) = x\%7$ (em que % representa o resto da divisão inteira). O mecanismo de resolução de colisões utilizado é *open addressing* com *linear probing*.

   - Apresente a evolução desta estrutura de dados quando são inseridos os valores 1, 15, 14, 3, 9, 5 e 27, por esta ordem.
   - Descreva o processo de remoção de um elemento nesta estrutura de dados, exemplificando com a remoção do valor 1 depois das primeiras 4 inserções acima.

3. Para implementar tabelas de hash usando o método de *open addressing* considere as seguintes declarações:

   ```
   #define HASHSIZE    31      // número primo
   #define EMPTY       ""
   #define DELETED     "-"
   typedef char KeyType[9];
   typedef void *Info;

   typedef struct entry {
     KeyType  key;
     Info info;
   } Entry, HashTable[HASHSIZE];
   ```

   (a) Implemente as seguintes funções

   ```
   int Hash(KeyType);               // função de hash
   void InitializeTable(HashTable); // inicializa a tabela de hash
   void ClearTable(HashTable);      // limpa a tabela de hash
   ```

   (b) Use o método *linear probing* na implementação das seguintes funções.

   ```
   // insere uma nova associação entre uma chave nova e a restante informação
   void InsertTable_LP(HashTable, KeyType, Info);

   // apaga o elemento de chave k da tabela
   void DeleteTable_LP(HashTable, KeyType);

   // procura na tabela o elemento de chave k, e retorna o índice da tabela
   // aonde a chave se encontra (ou -1 caso k não exista)
   int  RetrieveTable_LP(HashTable, KeyType);
   ```

(c) Use agora o método *quadratic probing* na implementação das seguintes funções.

```
// função de hash
int Hash_QP(KeyType, int);

// insere uma nova associação entre uma chave nova e a restante informação
void InsertTable_QP(HashTable, KeyType, Info);

// apaga o elemento de chave k da tabela
void DeleteTable_QP(HashTable, KeyType);

// procura na tabela o elemento de chave k, e retorna o índice da tabela
// aonde a chave se encontra (ou -1 caso k não exista)
int  RetrieveTable_QP(HashTable, KeyType);
```

(d) Efectue a análise assimptótica do tempo de execução das funções que implementou.

4. Para implementar tabelas de hash usando o método de *chaining* considere as seguintes declarações:

```
#define HASHSIZE    31    // número primo
typedef char KeyType[9];
typedef void *Info;

typedef struct entry {
  KeyType  key;
  Info info;
  struct entry *next;
} Entry, *HashTable[HASHSIZE];
```

(a) Apresente uma implementação para as seguintes funções.

```
// função de hash
int Hash(KeyType);

// inicializa a tabela de hash
void InitializeTable(HashTable);

// limpa a tabela de hash
void ClearTable(HashTable);

// insere uma nova associação entre uma chave nova e a restante informação
void InsertTable(HashTable, KeyType, Info);

// apaga o elemento de chave k da tabela
void DeleteTable(HashTable, KeyType);

// procura na tabela o elemento de chave k, e retorna o apontador
// para a célula aonde a chave se encontra (ou NULL caso k não exista)
Entry *RetrieveTable(HashTable, KeyType);
```

(b) Efectue a análise assimptótica do tempo de execução das funções que implementou.

4 Árvores AVL

As árvores AVL (propostas por *G.M. Adelson-Velskii e E.M. Landis*) são uma variante das árvores binárias de procura em que em cada nodo se guarda a diferença de alturas entre as sub-árvores.
Considere o seguinte tipo de dados para os nós de uma árvore AVL:

```
typedef struct avlTree {
    int value;
    int bal;
    struct avlTree *left, *right;
  } AVLNode, *AVLTree;
```

1. Defina uma função `int alturaAVL (AVLTree)` que calcule a altura de uma árvore em tempo proporcional à altura da árvore (i.e., em tempo logarítmico relativamente ao tamanho da árvore no caso de uma árvore balanceada).

2. Defina funções `AVLTree rotateLeft (AVLTree a)` e `AVLTree rotateRight (AVLTree a)` que fazem rotação simples à esquerda e direita na raíz de uma destas árvores.

3. Represente graficamente a evolução de uma árvore AVL quando é efectuada a seguinte sequência de inserções: 10, 20, 30, 70, 40, 50. Não se esqueça de indicar os factores de balanceamento de cada nó.

A Exercícios Adicionais

1. Considere de novo as seguintes declarações para **buffers** de inteiros.

```
typedef struct buffer *Buffer;

Buffer init   (void);         // inicia e aloca espaço
int    empty  (Buffer);       // testa se esta vazio
int    add    (Buffer, int);  // acrescenta elemento
int    next   (Buffer, int *);// proximo a sair
int    remove (Buffer, int *);// remove proximo
```

   (a) Uma instanciação deste conceito de *buffer* são as pilhas (*stacks*). Neste caso, o próximo elemento a sair é o último que foi acrescentado (*Last In First Out*).

   Apresente duas implementações de *Stacks* em que todas as operações executem em tempo constante (i.e., independente do número de elementos que estão na *stack*).

      i. Uma implementação baseada em listas ligadas

      ii. Uma implementação baseada em *arrays*. Assuma neste caso que existe definida uma constante `MaxS` que corresponde ao tamanho máximo da *stack*. Alternativamente, poderá ser passado um parâmetro extra na função de inicialização e que corresponde ao tamanho do vector a ser alocado na inicialização.

   (b) Uma outra instanciação do conceito de *buffer* são as filas de espera (*queues*). Neste caso, o próximo elemento a sair é o primeiro que foi acrescentado (*First In First Out*).

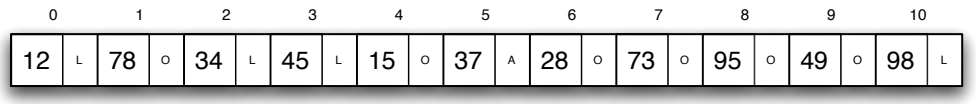
   Apresente duas implementações de *Queues* em que todas as operações executem em tempo constante (i.e., independente do número de elementos que estão na *queue*).

      i. Uma implementação baseada em listas ligadas

      ii. Uma implementação baseada em *arrays*. Assuma neste caso que existe definida uma constante `MaxQ` que corresponde ao tamanho máximo da *queue*. Alternativamente, poderá ser passado um parâmetro extra na função de inicialização e que corresponde ao tamanho do vector a ser alocado na inicialização.

2. Considere uma tabela de *hash*, com *open addressing* e tratamento de colisões por *linear probing*. Considere ainda que, para implementar remoções, cada célula da tabela tem uma *flag* que pode tomar três valores possíveis: `L`, `O` ou `A` (Livre, Ocupada ou Apagada).

   Assumindo que as chaves são inteiros e que a função de *hash* usada é `hash(n) = n%N`, considere o seguinte estado da tabela (para `N=11`).



(a) Partindo do princípio que a função `procura`, recebe o valor de uma chave e retorna a posição da tabela onde essa chave se encontra (e `-1` caso a chave não se encontre na tabela), qual o resultado de fazer, no estado apresentado, `procura(12)` e `procura(37)`. Para cada um dos casos, indique quais as posições da tabela que são consultadas.

(b) Se a próxima inserção for da chave 60, em que posição da tabela será armazenada? Justifique indicando quais as posições da tabela que são consultadas.

3. Considere de novo as implementações de tabelas de *hash* da Secção 3. Pretende-se agora alterá-las por forma a implementa tabelas *dinâmicas*, em que o tamanho do array alocado em cada instante vai depender do *factor de carga (nº de entradas / tamanho da tabela)*

   (a) Adapte as declarações das estruturas de dados para este fim.

   (b) Adapte as funções que definiu nas alíneas anteriores a esta nova implementação. Note que nas funções de inserção e de remoção

   - quando o factor de carga é superior ou igual a 75% (50% no caso usar o método *quadratic probing*) o tamanho da tabela é aumentado para o dobro;
   - quanto o factor de carga é menor ou igual a 25% o tamanho da tabela é reduzido a metade.

4. Suponha que, numa árvore AVL inicialmente vazia, foram inseridas as chaves 10, 15, 8, 9 e 20 (por esta ordem). Note que nenhuma das inserções provocou o desbalanceamento da árvore. Apresente uma sequência de inserções balanceadas na dita árvore que façam com que a chave que fica na raíz da árvore passe a ser 20.