

Ficha 2

Análise da complexidade de programas

Algoritmos e Complexidade
LEI / LCC / LEF

1 Contagem

1. Para cada uma das funções de ordenação abaixo

- Identifique o melhor e pior casos em termos do número de comparações entre elementos do array e em termos do número de trocas efectuadas.
- Calcule o número de comparações entre elementos do array efectuadas nesses casos identificados.

```
(a) void bubbleSort (int v[], int N){
    int i, j;
    for (i=N-1; i>0; i--)
        for (j=0; j<i; j++)
            if (v[j] > v[j+1]) swap (v,j,j+1);
}
```

```
(b) void iSort (int v[], int N){
    int i, j;
    for (i=1; i<N; i++)
        for (j=i; j>0 && v[j-1] > v[j]; j--)
            swap (v,j,j-1);
}
```

2. Considere as seguintes definições de funções (já estudadas na Ficha 1) que calculam o produto de dois números inteiros não negativos.

```
int mult1 (int x, int y){
    // pre: x>=0
    int a=x, b=y, r=0;
    while (a>0){
        r = r+b; a = a-1;
    }
    // pos: r == x * y
    return r;
}

int mult2 (int x, int y){
    // pre: x>=0
    int a=x, b=y, r=0;
    while (a>0) {
        if (a%2 == 1) r = r+b;
        a=a/2; b=b*2;
    }
    // pos: r == x * y
    return r;
}
```

Para cada uma destas funções efectue uma contagem do número de vezes que as operações primitivas¹ (+ - *2 /2 %2) contidas no corpo do ciclo são executadas no pior caso.

Considere que o tamanho do input é o número de bits necessários para representar os números inteiros passados como argumento. Recorde que, por exemplo, os números cuja representação requer 5 bits são {16, ..., 31}.

3. Considere a seguinte definição de uma função que calcula a maior soma de um segmento de um array de inteiros.

<pre>int maxSoma (int v[], int N) { int i, j, r=0, m; for (i=0; i<N; i++) for (j=i; j<N; j++) { m = soma(v,i,j); if (m>r) r = m; } return r; }</pre>	<pre>int soma (int v[], int a, int b) { int r = 0, i; for (i=a; i<=b; i++) r=r+v[i]; return r; }</pre>
---	---

- (a) Determine a complexidade da função `maxSoma` em termos do número de acessos ao array argumento.
- (b) Uma forma alternativa de resolver este problema consiste em usar um array auxiliar `c` com `N` elementos, que será preenchido de acordo com a seguinte propriedade

o elemento `c[i]` contém a maior soma de um segmento do array que termina (e inclui) `v[i]`.

Implemente esta estratégia e compare a complexidade desta solução com a da função apresentada.

4. Considere a seguinte função que calcula o comprimento do maior segmento crescente de uma array de inteiros.

<pre>int crescente (int v[], int N) { int i; for (i=1; i<N; i++) if (v[i] < v[i-1]) break; return i; }</pre>	<pre>int maxcresc (int v[], int N) { int r = 1, i = 0, m; while (i<N-1) { m = crescente (v+i, N-i); if (m>r) m = r; i++; } return r; }</pre>
--	--

Identifique o melhor e pior caso da função `maxcresc` em termos do número de comparações entre elementos do array argumento.

Calcule ainda esse número para o pior caso identificado.

¹Note que as operações `*2`, `/2` e `%2` se podem escrever como `>>1`, `<<1` e `&1`

2 Definições Recursivas

1. Utilize uma árvore de recorrência para encontrar limites superiores para o tempo de execução dados pelas seguintes recorrências (assuma que para todas elas $T(0)$ é uma constante):

(a) $T(n) = k + T(n - 1)$ com k constante

(b) $T(n) = k + T(n/2)$ com k constante

(c) $T(n) = k + 2 * T(n/2)$ com k constante

(d) $T(n) = n + T(n - 1)$

(e) $T(n) = n + T(n/2)$

(f) $T(n) = n + 2 * T(n/2)$

2. Exprima a complexidade da função `maxSomaR` (em termos do número de acessos ao array argumento) como uma recorrência.

```
int maxSomaR (int v[], int N) {
    int r=0, m1, m2, i;
    if (N>0) {
        m1 = m2 = v[0];
        for (i=1; i<N; i++) {
            m2 = m2+v[i];
            if (m2>m1) m1=m2;
        }
        m2 = maxSomaR (v+1,N-1);
        if (m1>m2) r = m1; else r = m2;
    }
    return r;
}
```

3. Considere o seguinte algoritmo para o problema das *Torres de Hanoi*:

```
void Hanoi(int nDiscos, int esquerda, int direita, int meio)
{
    if (nDiscos > 0) {
        Hanoi(nDiscos-1, esquerda, meio, direita);
        printf("mover disco de %d para %d\n", esquerda, direita);
        Hanoi(nDiscos-1, meio, direita, esquerda);
    }
}
```

Escreva uma relação de recorrência que exprima a complexidade deste algoritmo (por exemplo, em função do número de linhas impressas). Desenhe a árvore de recursão do algoritmo e obtenha a partir dessa árvore um resultado sobre a sua complexidade assintótica.

4. Considere a seguinte definição da função que ordena um vector usando o algoritmo de *merge sort*.

```

void msort (int v[], int N) {
    int m = N/2;
    if (N>1) {
        msort (v, m); msort (v+m, N-m);
        mergeH (v, N);
    }
}

```

Considere que a função `int mergeH (int a[], int N)` executa em tempo $T_{\text{merge}}(N) = 2 * N$. Apresente uma relação de recorrência que traduza o tempo de execução de `msort` em função do tamanho do vector argumento.

Apresente ainda uma solução dessa recorrência.

5. Considere a definição da função `altura` sobre árvores binárias. Descreva a sua complexidade com uma recorrência, considerando duas configurações extremas de árvores: (1) árvores equilibradas (os elementos estão distribuídos uniformemente pelas duas sub-árvores) ou (2) árvores "lista" (em que cada nodo tem pelo menos uma das sub-árvores vazias).

```

int altura (ABin a){
    int r=0;
    if (a!=NULL)
        r = 1 + max (altura (a->esq),
                    altura (a->dir));
    return r;
}

```

3 Análise de caso médio

1. Relembre a função `crescente` definida acima.

```

int crescente (int v[], int N) {
    int i;
    for (i=1; i<N; i++)
        if (v[i] < v[i-1]) break;
    return i;
}

```

Considerando que os valores do array são perfeitamente aleatórios e por isso, para qualquer índice i , a probabilidade de a posição i conter um valor menor do que a posição $i-1$ é 0.5.

Calcule o número médio de comparações efectuadas por esta função.

Com base no resultado obtido, calcule o custo médio da função `maxcresc` apresentada na Secção 1.

2. Com as mesmas considerações feitas na alínea anterior, num array aleatório v , e para cada posição i , em média, metade dos elementos de v entre as posições 0 e i são maiores do que $v[i]$.

Com base neste facto, faça a análise de tempo médio da função `iSort` apresentada na Secção 1.

3. Considere a função `intcmp` que recebe como argumento dois arrays de N bits (representando dois inteiros) e compara os valores representados.

Note que a função `cmp` é a mesma função, com os inteiros x e y representados da forma habitual.

```
int intcmp (int x[], int y[], int N){
    for (i=N-1;
        i>=0 && x[i] == y[i];
        i--)
        ;
    if (i==0) return 0;
    else return (x[i] - y[i]);
}

int cmp (unsigned x, unsigned y) {
    while (x!=0 && y!=0 && x&1 == y&1){
        x=x>1; y=y>1;
    }
    if (x==0 && y==0) return 0;
    else return (x&1 - y&1);
}
```

Assumindo que a probabilidade de dois bits aleatórios serem iguais é 0.5, determine o custo médio (número de comparações entre elementos dos arrays) desta função.

4. Considere a seguinte definição da função `inc` que recebe um array de N bits (representando um inteiro x) e que modifica o array de forma a representar $x+1$.

```
int inc (int x[], int N){
    int i=N-1;
    while (i>=0 && x[i] == 1)
        x[i--] = 0;
    if (i<0) return 1;
    x[i] = 1;
    return 0;
}
```

Calcule o custo médio desta função (em termos do número de bit alterados).

5. Relembre o algoritmo de procura numa árvore binária de procura.

```

int elem (int x, ABin a){
    while (a != NULL && a->valor != x)
        if (x < a->valor) a = a->esq;
        else a = a->dir;
    return (a!=NULL);
}

```

Análise a complexidade média (em termos de número de nodos consultados) desta função, assumindo que o elemento que se procura existe com igual probabilidade em cada posição da árvore.

Faça esta análise para duas configurações extremas de árvores: (1) árvores equilibradas (os elementos estão distribuídos uniformemente pelas duas sub-árvores) ou (2) árvores "lista" (em que cada nodo tem pelo menos uma das sub-árvores vazias).

4 Análise amortizada

1. Uma implementação possível de uma fila de espera (*Queue*) utiliza duas *stacks* A e B, por exemplo:

```

typedef struct queue {
    Stack a;
    Stack b;
} Queue;

```

- A inserção (*enqueue*) de elementos é sempre realizada na *stack* A;
 - para a remoção (*dequeue*), se a *stack* B não estiver vazia, é efectuado um *pop* nessa *stack*; caso contrário, para todos os elementos de A excepto o último, faz-se sucessivamente *pop* e *push* na *stack* B. Faz-se depois *pop* do último, que é devolvido como resultado.
- (a) Efectue a análise do tempo de execução no melhor e no pior caso das funções *enqueue* e *dequeue*, assumindo que todas as operações das *stacks* são realizadas em tempo constante.
 - (b) Mostre que o custo amortizado de cada uma das operações de *enqueue* ou *dequeue* numa sequência de N operações é $\mathcal{O}(1)$ usando o método do potencial.
2. Considere-se uma estrutura de dados do tipo *stack* com a habitual operação 'push', mas em que a operação 'pop' é substituída por uma operação 'multipop', uma generalização que remove os k primeiros elementos, deixando a pilha vazia caso contenha menos de k elementos. Uma implementação possível será

```

void multiPop(S,k) {
    while (!IsEmpty(S) && k != 0) {
        pop(S);
        k -= 1;
    }
}

```

Pela análise tradicional de pior caso,

- ‘push’ executa em tempo $\mathcal{O}(1)$
- ‘multiPop’ executa em tempo $\mathcal{O}(N)$

Utilize um dos métodos estudados, para mostrar que em termos amortizados a operação ‘multiPop’ executa também ela em tempo constante $\mathcal{O}(1)$.

3. Considere um algoritmo de inserção ordenada numa lista (crescente), com uma particularidade: são apagados os nós iniciais da lista contendo valores inferiores ao que está a ser inserido. Por exemplo, a inserção de 30 na lista [10, 20, 40, 50] resulta na lista [30, 40, 50]. A função seguinte implementa este algoritmo em C.

```
node *insert_rem (node *p, int x) {
    node *new = malloc(sizeof(node)); new->value = x;
    while (p && x > p->value)
        { aux = p; p = p->next; free (aux); }
    new->next = p;
    return new;
}
```

- (a) Analise o tempo de execução assintótico de ‘insert_rem’, identificando o pior e o melhor caso.
- (b) Em termos amortizados a operação de inserção da questão anterior executa em tempo constante. Efectue a sua análise agregada considerando a sequência de inserções 20, 70, 60, 30, 40, 50, 10, 80 (partindo de uma lista vazia). Considere que o custo real de cada inserção/remoção efectuada à cabeça da lista é 1, por isso a inserção de 30 na lista [10, 20, 40, 50] tem custo 3. Apresente ainda uma função de potencial apropriada sobre as listas, e calcule a partir dela o custo amortizado constante desta operação ‘insert_rem’.