UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2 horas e 30 minutos	21 de janeiro de 2022
TESTE 2 (COM CONSULTA)	

Escreve na tua folha de respostas os comandos executados no Matlab.

1. Diz, justificando sem efetuares cálculos, se concordas com a seguinte afirmação: *Dada a matriz*

$$V = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

e um vector $y \in \mathbb{R}^3$, o sistema $Va = y$ tem uma e uma só solução qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 3\}$.

2. Determina o valor de α tal que

$$p(-2) = -3,\ p(3) = 2,\ p(\alpha) = 0$$

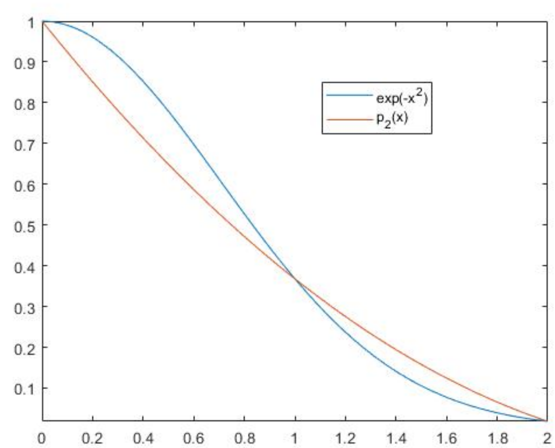
onde p é um polinómio de grau um.

3. Dados $(n+1)$ pontos $(x_i, f(x_i)),\ i = 0, ...n$, e calculadas as diferenças divididas

$$f[x_0, x_1],\ f[x_0, x_1, x_2],\ \cdots, f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

quantas operações aritméticas são necessárias para calcular o valor $p_n(z)$ num ponto z diferente dos nós usando a fórmula interpoladora de Newton? Justifica a tua resposta.

4. **a)** Para aproximar o valor de $I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$, calcula $\tilde{I} = \int_0^2 p_2(x) dx$ onde p_2 é o polinómio de grau 2 que interpola a função integranda nos nós $x_0 = 0, x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ (ver figura em baixo). Não deves usar nenhuma das funções disponíveis na Blackboard.



b) Usa a *function* simpson.m disponível na Blackboard para aproximar o valor de I à custa dos valores da função integranda nos pontos $x_i = 0.1 \times i, \; i = 0, 1, \cdots 20$. Apresenta o resultado obtido em *format long*.

c) Calcula nova aproximação usando simpson.m agora com espaçamento de 0.05 entre pontos. Apresenta o resultado obtido em *format long*.

d) Se o valor de $f^{(iv)}(\eta)$ presente na expressão do erro de truncatura não variar muito nas aproximações calculadas antes em b) e c), que relação existe entre os erros destas aproximações? Justifica.

5. **a)** Seja A uma matriz de ordem n tal que $A(1,1) \neq 0$ e seja M a matriz de eliminação gaussiana tal que M*A tem zeros na primeira coluna abaixo da diagonal principal. Como se determinam as entradas de M a partir das entradas da primeira coluna de A?

   b) Desta matriz M podemos determinar imediatamente algumas entradas da matriz L na fatorização LU da matriz A? Explica.

6. No Matlab começa por executar *G=magic(4)* para gerares uma certa matriz G e em seguida usa a *function GaussElimPP.m* com um vector b à tua escolha para ilustrar que pequenos erros nas entradas de G podem causar erros muitos maiores na solução do sistema $Gx = b$. Explica por que é que tal acontece.

7. Ainda para a mesma matriz G, no Matlab tem-se

```
>> [L U P]=lu(G)

L =
    1.0000         0         0         0
    0.2500    1.0000         0         0
    0.5625    0.4352    1.0000         0
    0.3125    0.7685    1.0000    1.0000

U =
   16.0000    2.0000    3.0000   13.0000
         0   13.5000   14.2500   -2.2500
         0         0   -1.8889    5.6667
         0         0         0    0.0000

P =
     1     0     0     0
     0     0     0     1
     0     0     1     0
     0     1     0     0
```

Diz como se relacionam as matrizes G, L, U e P e explica o motivo pelo qual o Matlab não determina simplesmente matrizes triangulares L e U tais que $G = L * U$.

questão	1	2	3	4a	4b	4c	4d	5a	5b	6	7	Total
cotação	2	2	2	2	1,5	1	2	1,5	1,5	2,5	2	20

RESOLUÇÃO

1. A afirmação é verdadeira. A matriz dada é a matriz de Vandermonde relativa aos nós $x_0 = -2,\ x_1 = 3$ e $x_3 = \alpha$. O determinante da matriz é diferente de zero se e só se os nós são todos distintos uma vez que $det(V) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)$. Portanto, se $\alpha \neq -2$ e $\alpha \neq 3$ então $det(V) \neq 0$ e o sistema é possível e determinado. A solução de $Va = y$ é o vetor dos coeficientes do polinómio p_2 de grau não superior a 2 tal que $p_2(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2$.

2. O polinómio p é dado por

$$p(x) = -3 + \frac{-3-2}{-2-3}(x+2) = x - 1.$$

De $p(\alpha) = 0$ resulta imediatamente $\alpha = 1$.

3. Para calcular

$$p_n(z) = f(x_0) + f[x_0, x_1](z-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](z-x_0)(z-x_1) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n](z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_n)$$

usa-se o método de Horner com centros (implementado na função polNewton):

```
n=length(x)-1;
T=TabDifDiv(x,f);
pz=T(n+1,n+1);
for k=n:-1:1
  pz=pz*(z-x(k))+T(k,k);
end
```

Para cada um dos n valores de k fazem-se 3 operações (uma multiplicação e duas adições/subtrações), portanto são necessárias $3n$ operações aritméticas para calcular o valor de $p(z)$.

4. **a)** A regra simples de Simpson consiste justamente em calcular o valor do integral do polinómio de grau 2 que interpola a função integranda nos pontos $x_0 = 0,\ x_2 = 2$ e também no ponto médio $x_1 = 1$. Portanto, não é necessário calcular o polinómio, basta usar a regra

$$\tilde{I} = \frac{h}{3}\left(f(0) + 4f(1) + f(2)\right).$$

No Matlab tem-se

```
>> f=@(x) exp(-x.^2); h=1; h/3*(f(0)+4*f(1)+f(2))

ans =

    0.8299
```

b)
```
>> format long, simpson(f,0,2,20)

ans =

   0.882080983594490
```

c) Reduzir o valor de h para metade equivale a duplicar o número de subintervalos em que se decompõe o intervalo de integração. Neste caso temos

```
>> simpson(f,0,2,40)

ans =

    0.882081365321161
```

d) A expressão do erro de truncatura na regra composta de Simpson é

$$-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)$$

onde η é um ponto que está entre a e b e varia com o valor de h. Portanto, os erros de truncatura nas alíneas b) e c) são, respetivamente, com $h = 0.1$,

$$T_b = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta_b)$$

e

$$T_c = -\frac{(h/2)^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta_c) = -\frac{1}{16}\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta_c)$$

Assim, se for

$$f^{(iv)}(\eta_c) \approx f^{(iv)}(\eta_b)$$

então $T_c \approx T_b/16$.

5. **a)** M difere da matriz identidade de ordem n apenas nas entradas na primeira coluna abaixo da diagonal principal:

$$M(i,1) = -A(i,1)/A(1,1),\ i = 2, \cdots, n.$$

b) As entradas na primeira coluna da matriz L abaixo da diagonal principal são dadas por

$$L(i,1) = -M(i,1) = A(i,1)/A(1,1),\ i = 2, \cdots, n.$$

6. Usaremos o vetor b que corresponde à solução exata x=ones(4,1)

```
G=magic(4); b=G*ones(4,1);
```

Em seguida, resolvemos o sistema Gx=b (cuja solução é o vetor de entradas todas iguais à unidade)

```
>> x=GaussElimPP(G,b)
x =

    1.5000
    2.5000
   -0.5000
    0.5000
```

Como se pode apreciar, o resultado é muito diferente da solução do sistema. A causa dos erros é o elevado número de condição do sistema que é dado por

```
>> cond(G)

ans =

   4.7133e+17
```

e que amplia enormemente pequenos erros de arredondamento cometidos no algoritmo (eliminação de Gauss).

7. Tem-se
$$L * U = P * G,$$
isto é, as matrizes L e U constituem a fatorização LU da matriz $P * G$ que difere de G por troca de linhas, mais exatamente as linhas 2 e 4. Por razões de estabilidade numérica, a função lu do Matlab usa pivotação parcial para evitar que as matrizes L e/ou U tenham números de condição muito maiores do que G. Isto pode ocorrer se a pivotação parcial não for usada e ocorrerem multiplicadores muito grandes (em valor absoluto). É verdade que neste caso a matriz U produzida pela função lu do Matlab tem um número de condição muito grande

```
>> >> cond(U)

ans =

   7.6661e+16
```

mas isto é devido ao facto da matriz G ter também, como se viu antes, um número de condição muito grande.