UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2 horas 30 minutos	21 de janeiro de 2021
Teste (COM CONSULTA)	

Deves escrever na tua folha de respostas todos os comandos executados no Matlab.

1. No Matlab define a função (tangente)

```
>> f=@tan
```

a) Determina um intervalo $[a, b]$ tal que $a > 1, b < 2, b - a < 10^{-2}$ e $f(a)f(b) < 0$. Apresenta todos os cálculos efetuados ou o código Matlab executado.

b) Podes concluir que existe uma raiz da equação $tan(x) = 0$ entre a e b? Porquê? (recorda que $tan(x) = sin(x)/cos(x)$)

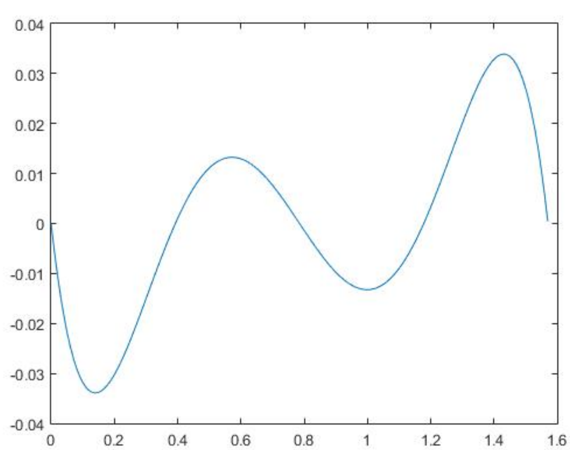
2. Seja p o polinómio de grau o menor possível tal que $p(x_k) = cos(x_k)$ para cada $x_k = \frac{k\pi}{8}$, $k = 0, \cdots, 4$.

a) Calcula o valor de $p(0.14)$, usando para o efeito um dos códigos disponíveis na Blackboard.

b) Determina um majorante do erro

$$|cos(x) - p(x)|$$

para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Usa para o efeito informação que podes obter da observação do gráfico (em baixo) do polinómio nodal $x(x - \frac{\pi}{8})(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{3\pi}{8})(x - \frac{\pi}{2})$



3. Sejam $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ e (x_2, y_2) três pontos onde os x_i são todos diferentes e

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Mostra que existe uma reta que passa pelos 3 pontos dados e escreve uma equação dessa reta.

4. Seja

$$I = \int_1^2 log(x)dx,$$

onde $log(x)$ é o logaritmo natural de x.

a) Para calcular aproximadamente o valor de I, usa a "function" disponível na Blackboard que implementa uma regra de grau 3, com $h = 0.1$.

b) Usa a expressão do erro de truncatura para calcular um majorante para o erro cometido na aproximação anterior.

5. Considera o sistema

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 6 \\ & 10^{-14}x_2 & +x_3 & = 10 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \end{cases}$$

a) Usa uma "function" disponível na Blackboard para resolver corretamente o sistema.

b) Se o sistema for resolvido pelo método de eliminação de Gauss sem pivotação parcial, a aproximação produzida terá erros grandes. Explica detalhadamente qual é a causa dos erros.

6. Para $\alpha \neq 0$, a inversa da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é

$$C^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

Para valores $\alpha \approx 0$, o sistema $Cx = b$, para um dado vetor b, é bem ou mal-condicionado? Justifica a resposta.

questão	1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	5a	5b	6	Total
cotação	2	2	1.5	2	2.5	1.5	2.5	1.5	2	2.5	20

RESOLUÇÃO

1. **a)** Comecemos por verificar que $tan(1) * tan(2) < 0$.

```
>> f=@tan; f(1)*f(2)

ans =

   -3.4030
```

Vamos usar o método da bisseção com os valores iniciais $a = 1$ e $b = 2$ até encontrarmos um intervalo $[a, b]$ cuja amplitude seja menor do que 10^{-2} e que cumpra a condição $f(a) * f(b) < 0$.

```
>> a=1; b=2; while b-a >=1e-2, m=(a+b)/2; if f(a)*f(m)<0, b=m; else, a=m;...
      end,end, a, b

a =

    1.5703


b =

    1.5781
```

b) Não existe nenhuma raiz de $tan(x) = 0$ entre estes valores de a e b. Se a função tan fosse contínua no intervalo $[a, b]$ então a condição $f(a) * f(b) < 0$ implicaria a existência de pelo menos uma raiz entre a e b. Mas a função tangente não é contínua neste intervalo que contem o ponto $\pi/2$ onde se anula o denominador $cos(x)$.

2. **a)** Podemos usar a "function"poLagrange ou a "function"polNewton (ambas disponíveis na Blackboard).

```
>> xi=0:pi/8:pi/2; poLagrange(xi,cos(xi),0.14), polNewton(xi,cos(xi),0.14)

ans =

    0.9904


ans =

    0.9904
```

b) A expressão geral do erro do polinómio interpolador neste caso dá

$$cos(x) - p(x) = (x - 0)(x - \frac{\pi}{8})(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{3\pi}{8})(x - \frac{\pi}{2}) \times \frac{-sin(\eta)}{5!}$$

onde η é um ponto que está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. Por observação do gráfico escrevemos

$$|(x-0)(x-\frac{\pi}{8})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{3\pi}{8})(x-\frac{\pi}{2})| < 0.04$$

para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e resulta

$$|cos(x) - p(x)| < 0.04 \times \frac{1}{120} = 3.33...e-04.$$

3. Usando a fórmula interpoladora de Newton, com diferenças divididas, o polinómio de grau não superior a 2, digamos p_2, tal que $p_2(x_i) = y_i$, para $i = 1, 2, 3$, é

$$p_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

onde

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1},\ f[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

e

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}.$$

Se $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_2]$ então $[f[x_0, x_1, x_2] = 0$ e

$$p_2(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0).$$

A equação da reta é então

$$y = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0).$$

4. **a)** Trata-se da regra de Simpson.

```
>> S=simpson(@log,1,2,10)

S =

   0.3863
```

O último parâmetro de entrada é $n = 10$, o número de subintervalos que corresponde a $h = 0.1$.

b) O erro de truncatura da regra de Simpson composta é, no caso geral, dado por

$$\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)$$

onde η é um ponto entre a e b. Com $f(x) = log(x)$ tem-se $f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$, $f^{(iv)}(x) = -6x^{-4} = -6/x^4$. Concluímos que neste caso é

$$|f^{(iv)}(\eta)| \leq 6$$

e

$$\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta) \leq \frac{(0.1)^4}{180} \times 1 \times 6 = 3.33...e-06$$

5. **a)** Vamos usar GaussElimPP que implementa o método de eliminação de Gauss com pivotação parcial.

```
>> A=[1 2 3; 0 1e-14 1; 0 1 1], b=[6 10 1]'

A =

    1.0000    2.0000    3.0000
         0    0.0000    1.0000
         0    1.0000    1.0000


b =

     6
    10
     1

>> x=GaussElimPP(A,b)

A =

    1.0000    2.0000    3.0000
         0    1.0000    1.0000
         0    0.0000    1.0000


x =

   -6.0000
   -9.0000
   10.0000
```

b) Sem pivotação parcial, será gerado um multiplicador muito grande na eliminação de A(3,2)=1 usando como pivot A(2,2)=1e-14; o multiplicador será -1e+14 que fará aparecer na matriz ampliada entradas muito grandes que ampliarão muito os erros de arredondamento.

6. O número de condição do sistema $Cx = b$ é dado por $\kappa(C) = ||C||.||C^{-1}||$ e quanto maior for este número mais mal condicionado é o sistema. Com efeito, os erros relativos da solução do sistema podem ser tão grandes quanto o produto por $\kappa(C)$ dos erros relativos nos dados. Para valores de α próximos de zero é $||C^{-1}||$ muito grande (aproximadamente igual a $2/\alpha$) e o problema é mal condicionado.