UNIVERSIDADE DO MINHO
Licenciatura em Ciências da Computação
Análise Numérica

Duração: 2 horas	7 de janeiro de 2019
TESTE 2 (COM CONSULTA)	

Escreve na tua folha de respostas os comandos executados no Matlab.

1. De uma função f conhecem-se os valores a seguir tabelados

x	-1	0	1/2	1
f(x)	-6	-7	-21/4	-2

a) Mostra que não existe nenhum polinómio de grau exatamente igual a 3 que interpola f nos pontos dados.

b) Se pretendermos usar interpolação linear para aproximar o valor de $f(0.1)$, quais dos nós e valores nodais tabelados devemos usar para, em princípio, produzir uma melhor aproximação? Justifica a tua escolha.

c) Seja q o polinómio de grau o menor possível que interpola f nos nós $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1/2$. Seja r o polinómio de grau o menor possível que interpola f nos nós $x_1 = 0, x_2 = 1/2$ e $x_3 = 1$. A partir das diferenças divididas produzidas no Matlab com

```
>> T=TabDifDiv([-1,0,1/2,1], [-6,-7,-21/4,-2])
```

usa a fórmula interpoladora de Newton para determinar $q(x)$ e $r(x)$ (nota: não é necessário "simplificar"as expressões obtidas).

d) Usa um dos códigos desenvolvidos nas aulas para calcular os valores de $q(z)$ e $r(z)$ para $z = 0.1$, $z = 0.2$ e $z = 0.3$ (apresenta os resultados obtidos em format short). Destes resultados podemos concluir que q e r são afinal o mesmo polinómio? Porquê?

2. Seja

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

a) Usa o código Matlab que implementa a regra de Simpson com $h = 0.25$ para aproximar o valor de I.

b) Determina um majorante para o erro de truncatura cometido na aproximação calculada.

c) Diz, justificando, se concordas com a seguinte afirmação *"com $h = 0.125$ a regra de Simpson dá-nos uma aproximação que deverá ter pelo menos mais um algarismo significativo correto do que a aproximação obtida com $h = 0.25$"*

d) Uma vez que a função integranda é uma função par, tem-se

$$I = 2\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Qual é a vantagem de usar esta relação no cálculo de valores aproximados de I por regras de integração numérica?

3. **a)** Usa o código GaussElimPP para calcular a última coluna da matriz inversa da matriz $A = hilb(10)$. Apresenta os resultados em format short.

   b) É de esperar erros importantes nos resultados? Porquê?

4. Considera a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   a) A fatorização $C = L * U$, onde L é uma matriz triangular inferior com unidades na diagonal principal e U é uma matriz triangular superior, existe qualquer que seja o valor de α? Justifica a tua resposta.

   b) No Matlab, define a matriz C considerando $\alpha = 2^{-40}$ e, em seguida, executa

```
>> format short e, [L U P]=lu(C)
```

   Interpreta detalhadamente o resultado obtido.

questão	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	4a	4b	Total
cotação	1,5	1,5	1,5	2	1,5	2	1,5	1,5	2	1,5	1,5	2	20

RESOLUÇÃO

1. **a)** A tabela das diferenças divididas produzida com

```
>> T=TabDifDiv([-1,0,1/2,1],[-6,-7,-21/4,-2])
```

é

```
-6.0000
-7.0000   -1.0000
-5.2500    3.5000    3.0000
-2.0000    6.5000    3.0000         0
```

e na forma de Newton o polinómio interpolador de grau não superior a 3 é

$$p(x) = -6 - 1 \times (x+1) + 3 \times (x+1)(x-0) + 0 \times (x+1)(x-0)(x-1/2).$$

Este polinómio é de grau 2 e, de acordo com a teoria da interpolação polinomial, é o único polinómio de grau não superior a 3 que interpola os pontos dados. Portanto, não há nenhum polinómio de grau exatamente igual a 3 que interpole os pontos dados.

b) O erro do polinómio interpolador de grau um nos nós x_0 e x_1 num ponto x entre x_0 e x_1 é dado por

$$p(x) - f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}$$

onde ξ_x é um ponto que está entre x_0 e x_1. Assim, para minimizar

$$|(x - x_0)(x - x_1)|$$

devemos escolher os nós mais próximos de $x = 0.1$, neste caso, os nós 0 e 1/2 (a que correspondem os valores nodais -7 e -21/4, respetivamente).

c) A partir da tabela já calculada na alínea a) podemos escrever

$$q(x) = -6 - 1 \times (x+1) + 3 \times (x+1)(x-0)$$

e

$$r(x) = -7 + 3.5 \times x + 3 \times x(x - 1/2).$$

d) Com

```
>> polNewton([-1, 0, 1/2],[-6,-7,-21/4],0.1)
>> polNewton([-1, 0, 1/2],[-6,-7,-21/4],0.2)
>> polNewton([-1, 0, 1/2],[-6,-7,-21/4],0.3)
```

obtemos os resultados -6.7700, -6.4800 e -6.1300, respetivamente. Com

```
>> polNewton([0, 1/2, 1],[-7,-21/4,-2],0.1)
>> polNewton([0, 1/2, 1],[-7,-21/4,-2],0.2)
>> polNewton([0, 1/2, 1],[-7,-21/4,-2],0.3)
```

obtemos os mesmos resultados. Uma vez que os polinómios q e r são de grau não superior a 2 e coincidem em 3 pontos, concluímos que são afinal o mesmo polinómio.

2. **a)** A *function* simpson, que implementa a regra de Simpson, tem como parâmetros de entrada, a função integranda, os extremos a e b do intervalo de integração e o número n de subintervalos em que se divide o intervalo $[a, b]$. Sendo

$$h = \frac{b-a}{n}$$

tem-se neste caso

$$n = 2/0.25 = 8.$$

Executando, no Matlab,

```
>> simpson('exp(-x.^2/2)',-1,1,8)
```

obtemos a aproximação 1.7113

b) Na regra composta de Simpson o erro de truncatura é dado por

$$E_S(h) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)$$

onde η está entre a e b.
De $f(x) = e^{-x^2/2}$ resulta

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -xe^{-x^2/2} \\
f''(x) &= -e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2} = (x^2-1)e^{-x^2/2} \\
f'''(x) &= 2xe^{-x^2/2} - x(x^2-1)e^{-x^2/2} = -x(x^2-3)e^{-x^2/2} \\
f^{(iv)}(x) &= -(3x^2-3)e^{-x^2/2} + x(x^3-3x)e^{-x^2/2} = (x^4-6x^2+3)e^{-x^2/2}.
\end{aligned}$$

Do gráfico da função obtido com

```
>> fplot('(x^4-6*x^2+3)*exp(-x^2/2)',[-1,1])
```

conclui-se que $|f^{(iv)}(x)|$ atinge o máximo igual a 3 (para $x = 0$) e tem-se

$$|E_S(h)| \leq \frac{0.25^4}{180} \times 2 \times 3 = \approx 1.3 \times 10^{-4}.$$

c) A afirmação é verdadeira. Uma vez que, de acordo com a expressão dada antes, o erro de truncatura é proporcional a h^4, dividir h por 2 corresponde aproximadamente a dividir o erro por 2^4. Mais exatamente, de

$$E_S(h) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)$$

e

$$E_S(h/2) = -\frac{(h/2)^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\theta)$$

resulta

$$\frac{E_S(h)}{E_S(h/2)} = 16 \times \frac{f^{(iv)}(\eta)}{f^{(iv)}(\theta)}.$$

Se for

$$\frac{|f^{(iv)}(\eta)|}{|f^{(iv)}(\theta)|} \geq \frac{10}{16}$$

então

$$|E_S(h)| \geq 10 \times |E_S(h/2)|$$

o que significa, em particular, que o erro produzido com $h = 0.125$ é dez vezes menor que o erro produzido com $h = 0.25$. Tendo em conta o valor de I, isto corresponde a dizer que a aproximação produzida com $h = 0.125$ tem mais um algarismo correto do que a aproximação produzida com $h = 0.25$.

d) Com o mesmo trabalho computacional (isto é, com o mesmo valor de n) reduz-se o valor de h para metade e, como se disse antes, a aproximação obtida deverá ter pelo menos mais um algarismo significativo.

3. **a)** Se X é a matriz inversa de A, de $AX = I$, conclui-se que $AX(:, j) = I(:, j)$ para cada cada uma das colunas de X e de I, isto é, para cada $j = 1, \cdots n$. No caso presente, a última coluna da inversa de A é a solução do sistema de equações lineares

$$Ax = b$$

onde b é a última coluna da matriz identidade de ordem 10. Com

```
>> A=hilb(10); b=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]'; x=GaussElimPP(A,b)
```

obtem-se

```
x =

   1.0e+11 *

   -0.0000
    0.0008
   -0.0183
    0.1707
   -0.8321
    2.3300
   -3.8834
    3.8041
   -2.0209
    0.4491
```

b) O sistema é mal condicionado. Com efeito o número de condição $||A|| \cdot ||A^{-1}||$ é dado por

```
>> cond(A)

ans =

   1.6025e+13
```

e pequenos erros iniciais (ou introduzidos durante o cálculo) serão muito ampliados.

4. **a)** Uma matriz quadrada de ordem n admite a fatorização LU se e só se forem diferentes de zero os determinantes das submatrizes principais formadas pelas primeiras k linhas e k colunas ($k = 1, \cdots n-1$). No caso presente, isto só não acontece quando $\alpha = 0$ (para este valor de α a submatriz principal de ordem 2 é singular).

   b)
```
>> alpha=2^-40; C=[1 0 2; 0 alpha 3; -1 1 2]
>> format short e; [L U P]=lu(C)

L =

   1.0000e+00            0            0
  -1.0000e+00   1.0000e+00            0
            0   9.0949e-13   1.0000e+00


U =

   1.0000e+00            0   2.0000e+00
            0   1.0000e+00   4.0000e+00
            0            0   3.0000e+00


P =

     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0
```

A função lu do Matlab produz os fatores L, U e P tais que A=P*L*U. Os fatores L e U obtidos são a fatorização LU de uma matriz que difere da matriz A por troca de linhas. No caso presente, a troca é da 2ª com a 3ª linha. Sem esta troca de linhas seriam produzidas matrizes L e U com números de condição muito elevados o que não acontece com as matrizes apresentadas em cima.