UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2 horas	12 de janeiro de 2017
TESTE 2 (COM CONSULTA)	

Deves escrever na tua folha de respostas todos os comandos executados no Matlab.

1. **a)** Usando a fórmula interpoladora de Lagrange, escreve a expressão de $p(x)$ onde p é o polinómio de grau o menor possível e cujo gráfico passa pelos pontos $(1, 3)$, $(2, -5)$ e $(4, 0)$ (nota: não é necessário simplificar a expressão de $p(x)$).

   b) Determina o valor de b tal que o polinómio p definido na alínea anterior verifica a condição $p(3) = b$. (nota: podes usar um código ("função") Matlab desenvolvido nas aulas).

   c) Representando o mesmo polinómio p na forma $p(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, diz, justificando e sem efetuar quaisquer cálculos, qual é o valor de a_1.

   d) O vetor dos coeficientes $a = [a_1; a_2; a_3; a_4]$ dados na alínea anterior é a solução de um sistema de equações. Determina a matriz deste sistema e o vetor dos termos independentes, escreve-os na tua folha de respostas, e usa o Matlab para calcular finalmente o vector a.

   e) Qual é computacionalmente mais eficiente para a interpolação, a fórmula de Lagrange ou o processo usado na alínea anterior? Justifica.

2. No Matlab, se executarmos

```
>> x=1:0.1:10; pz=interp1(x,log(x),[1.05, 7.15, 8.35])
```

   obtemos aproximações para os valores de $log(1.05)$, $log(7.15)$ e $log(8.35)$.

   a) Explica o mais detalhadamente possível como é que a função `interp1` calcula cada uma daquelas aproximações.

   b) Usando a expressão do erro do polinómio interpolador e sem usar os valores de $log(1.05)$, $log(7.15)$ e $log(8.35)$, encontra majorantes para cada um dos erros

$$|pz(1) - log(1.05)|$$
$$|pz(2) - log(7.15)|$$
$$|pz(3) - log(8.35)|.$$

3. **a)** No cálculo de integrais definidos, qual das regras dá, em geral, melhores aproximações, a regra dos trapézios ou a regra de Simpson? Porquê?

   b) Usa as regras compostas dos trapézios e de Simpson, com $h = 0.1$, para aproximar o valor de $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

   c) Usando as expressões dos erros, determina o valor de h que deve ser usado em cada uma das regras para garantir aproximações com erros inferiores a 10^{-7}.

4. Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 6 \\ & 2^{-52}x_2 & +x_3 & = 10 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \end{cases}$$

a) Usa as funções `GaussElim` e `GaussElimPP`, desenvolvidas nas aulas, para resolver o sistema dado. Na tua folha de respostas escreve os resultados obtidos e explica por que são tão diferentes esses resultados.

b) Explica o mais detalhadamente possível em que diferem os códigos das funções `GaussElim` e `GaussElimPP`.

5. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2^{-52} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz do sistema dado no exercício anterior,

a) Determina matrizes **L**, triangular inferior com unidades na diagonal principal, e **U**, triangular superior, tal que $A = L \cdot U$.

b) Usa os fatores L e U para resolver o sistema dado no exercício anterior;

c) A solução obtida é correta? Qual é o problema?

questão	1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	5c	Total
cotação	1	1	1	1,5	1	1,5	1,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	20

RESOLUÇÃO

1. a) A expressão é

$$p(x) = 3 \times \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} - 5 \times \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}.$$

b) Para calcular o valor $b = p(3)$ podemos usar a função `poLagrange`. Executando, no Matlab,

```
>> b=poLagrange([1,2,4],[3, -5, 0], 3)
```

obtemos $b = -6$.

c) Dados $n+1$ pontos, existe e é único o polinómio interpolador de grau não superior a n. Sendo p o polinómio definido na alínea a) por 3 pontos, conclui-se que p tem grau não superior a 2 e $a_1 = 0$.

d) Uma vez que já se sabe que $a_1 = 0$, podemos escrever o sistema nas incógnitas a_2, a_3 e a_4

$$\begin{cases} p(1) = 3 \\ p(2) = -5 \\ p(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 & +a_3 & +a_4 & = 3 \\ 2^2 a_2 & +2a_3 & +a_4 & = -5 \\ 4^2 a_2 & +4a_3 & +a_4 & = 0 \end{cases}$$

A matriz do sistema (matriz de Vandermonde) é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

e o vetor dos termos independentes é

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No Matlab, `>> A=[1, 1, 1; 4, 2, 1; 16, 4, 1]; A\[3; -5; 0]` produz a solução

$$\begin{bmatrix} 3.5 \\ -18.5 \\ 18 \end{bmatrix}$$

e o polinómio é $p(x) = 3.5x^2 - 18.5x + 18$.

e) A fórmula de Lagrange é mais eficiente. Sendo n o grau do polinómio p, a fórmula de Lagrange requer um número $O(n^2)$ de operações aritméticas para calcular um valor $p(x)$ enquanto que a solução do sistema requer $O(n^3)$ operações aritméticas.

2. a) Usada na forma indicada, a função `interp1` faz interpolação linear da função dada (neste caso o logaritmo natural) nos dois nós entre os quais se situa o argumento dado. Mais concretamente, a aproximação para $log(1.05)$ é a ordenada do ponto de abcissa 1.05 que se situa na recta que passa pelos pontos $(1, log(1))$ e $(1.1, log(1.1))$. Analogamente, a aproximação para $log(7.15)$ é a ordenada do ponto de abcissa 7.15 que se situa na recta que passa pelos pontos $(7.1, log(7.1))$ e $(7.2, log(7.2))$ e a aproximação para $log(8.35)$ é a ordenada do ponto de abcissa 8.35 que se situa na recta que passa pelos pontos $(8.3, log(8.3))$ e $(8.4, log(8.4))$.

b) O erro do polinómio interpolador p de grau 1 de uma função f nos nós x_i, x_{i+1} é

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\theta)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

onde θ é um ponto que está entre x_i e x_{i+1}. Resulta

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{2}|x - x_i|.|x - x_{i+1}|$$

onde

$$M = max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f''(x)|.$$

Com $f(x) = log(x)$, tem-se $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ e $M = 1$ no intervalo $[1, 1.1]$, $M = \frac{1}{7.1^2}$ no intervalo $[7.1, 7.2]$ e $M = \frac{1}{8.3^2}$ no intervalo $[8.3, 8.4]$. Daqui resulta

$$\begin{aligned}
|pz(1) - log(1.05)| &\leq \frac{1}{2}|1.05 - 1|.|1.05 - 1.1| \\
|pz(2) - log(7.15)| &\leq \frac{1}{2 \times 7.1^2}|7.15 - 7.1|.|7.15 - 7.2| \\
|pz(3) - log(8.35)| &\leq \frac{1}{2 \times 8.3^2}|8.35 - 8.3|.|8.35 - 8.4|
\end{aligned}$$

o que no Matlab dá

$$\begin{aligned}
|pz(1) - log(1.05)| &\leq 1.25e - 3 \\
|pz(2) - log(7.15)| &\leq 2.4 \ldots e - 5 \\
|pz(3) - log(8.35)| &\leq 1.8 \ldots e - 5
\end{aligned}$$

3. a) Por ser de grau 3 (isto é, exacta para todos os polinómios de grau não superior a 3), a regra de Simpson dá, em geral, melhores aproximações do que a regra dos trapézios, que tem grau 1.

b) Podemos usar, para o efeito, os códigos desenvolvidos nas aulas. Com

```
>> trapezios('1./x',1,2,10)
```

e

```
>> simpson('1./x',1,2,10)
```

obtemos, respetivamente, as aproximações 0.6938 e 0.6932. Em ambos os casos, o último argumento é $n = 10$ ($n = \frac{b-a}{h}$).

c) O erro (em valor absoluto) da regra dos trapézios tem a seguinte expressão

$$\frac{h^2}{12}(b - a)|f''(\eta)|$$

onde $\eta \in [a, b]$. Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$ é $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ que no intervalo $[1, 2]$ assume o valor máximo igual a 2. De $\frac{h^2}{6} < 10^{-7}$ resulta $h < \sqrt{6 \times 10^{-7}} = 7.7460...e - 04$.

O erro (em valor absoluto) da regra e Simpson é dado por

$$\frac{h^4}{180}(b - a)|f^{(iv)}(\xi)|$$

onde $\xi \in [a, b]$. Sendo $f^{(iv)}(x) = \frac{24}{x^5}$ que no intervalo $[1, 2]$ assume o valor máximo igual a 24, de $\frac{24}{180}h^4 < 10^{-7}$ resulta $h < (7.5 \times 10^{-7})^{0.25} = 0.0294$.

4. a) Com

```
>> A=[1, 2, 3; 0, 2^(-52), 1; 0, 1, 1]; b=[6; 10; 1]; x=GaussElim(A,b)
```

obtem-se

$$\begin{matrix} -8.0000 \\ -8.0000 \\ 10.0000 \end{matrix}$$

e `>>  x=GaussElimPP(A,b)`

dá

$$\begin{matrix} -6.0000 \\ -9.0000 \\ 10.0000. \end{matrix}$$

A solução obtida com `GaussElim` está errada porque o método de eliminação de Gauss é neste caso numericamente instável.

b) O código GaussElimPP inclui a pivotação parcial que evita a ocorrência de multiplicadores muito grandes. No k-ésimo passo de redução ($k = 1, \cdots, n-1$) é escolhida para linha pivotal a que exibir na posição $(j,k), j = k, \cdots, n$, o elemento de maior valor absoluto. Isto tem como resultado que todos os multiplicadores terão valor absoluto não superior à unidade.

5. a) As matrizes pedidas são

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2^{52} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2^{-52} & 1 \\ 0 & 0 & 1-2^{52} \end{bmatrix}$$

b) Para obter a solução de $LUx = b$ podemos resolver sucessivamente os sistemas $Ly = b$ (triangular inferior) e $Ux = y$ (triangular superior). Definidas as matrizes L e U e o vector b, no Matlab

```
>> y=L\b; x=U\y
```

dá

$$\begin{matrix} -8.0000 \\ -8.0000 \\ 10.0000 \end{matrix}$$

c) A solução obtida na alínea anterior coincide com a que foi obtida antes com a função `GaussElim` e está errada. O problema é que as matrizes L e U têm números de condição muito grandes. Com efeito,

```
>> cond(L), cond(U)
```

produz os números $2.0282e + 31$ e $1.5103e + 16$.