UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2 horas e 30 minutos	2 de novembro de 2019
Teste 1	

Deves escrever na tua folha de respostas todos os comandos executados no Matlab.

1. No formato duplo da norma IEEE 754, um número normalizado expressa-se na forma
$$\pm\,(1.b_1b_2\cdots b_{52})_2 \times 2^E$$
onde $b_i = 0$ ou $b_i = 1$, para cada $i = 1, \cdots, 52$, e $-1022 \leq E \leq 1023$. Denotamos por $\mathcal{F}$ o conjunto destes números.

   a) No Matlab, executando os seguintes comandos

   ```
   >> (2*realmax)/2
   >> 2*(realmax/2)
   ```

   produzem-se resultados diferentes. Como explicas isto?

   b) Considera o intervalo dos números reais compreendidos entre 70 e o seu sucessor em $\mathcal{F}$, digamos $s(70)$. Determina majorantes, válidos para qualquer x no intervalo $]70, s(70)[$, para os erros absoluto $|x - fl(x)|$ e relativo $|\frac{x-fl(x)}{x}|$, onde $fl(x)$ representa o valor arredondado de x usando o modo de arredondamento "para o mais próximo". Justifica as tuas respostas.

2. Sabendo que $\frac{\pi}{4}$ é a soma da série alternada (os termos da série seguem todos a mesma lei que se deduz dos termos apresentados)
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$
calcula no Matlab o valor da soma dos primeiros 100 termos desta série e determina um majorante para o erro de truncatura cometido na aproximação.

3. No Matlab, define a uma certa função f (para todos os valores de x tais que $cos(x) \neq 0$) executando

   ```
   >> f=inline('(1-sin(x)^2)/cos(x)^2')
   ```

   Dependendo do valor de x, esta expressão pode produzir o valor de $f(x)$ com erro grande. Ilustra o problema com um valor de x à tua escolha e explica qual é a causa do erro observado.

4. Seja p_2 o polinómio de grau 2 que interpola a função $g(x) = 1/x$ nos nós $x_0 = 1, x_1 = 5/3$ e $x_2 = 2$.

    a) Expressa $p_2(x)$ usando a fórmula interpoladora de Lagrange. Não efetues quaisquer cálculos.

    b) Usa um dos códigos desenvolvidos nas aulas para calcular o valor de $p_2(1.7)$.

    c) Usa a expressão do erro do polinómio interpolador para encontrar um majorante para $|p_2(1.7) - g(1.7)|$.

5. No início de cada ano o cliente de um banco deposita v euros num fundo de investimento e retira, ao fim do n-ésimo ano, um capital de M euros. Se r é a taxa de juro anual do investimento, tem-se a seguinte equação

$$M - v\frac{1+r}{r}[(1+r)^n - 1] = 0$$

    a) Supondo que $v = 1000$ euros e que depois de 5 anos M é igual a 5200 euros, mostra que a correspondente taxa de juro está entre 0 e 0.05 (isto é, entre 0% e 5%).

    b) Usa o método da bisseção para determinar a taxa de juro anual com dois algarismos significativos corretos.

questão	1a	1b	2	3	4a	4b	4c	5a	5b	Total
cotação	2	3	2,5	2,5	2	2	2	2	2	20

RESOLUÇÃO

1. a) O realmax é o maior número de $\mathcal{F}$ ($b_i = 1$, $i = 1, \cdots, 52$ e $E = 1023$. A execução de 2*realmax produz Inf ("overflow") e este "resultado"não se altera na divisão por 2. Por outro lado, 2*(realmax/2) produz o próprio realmax.

   b) De $70 = 2^6 + 2^2 + 2$ conclui-se que

$$70 = (1.0001100\cdots 00)_2 \times 2^6$$

   e a amplitude do intervalo $[70, s(7)]$ é igual a $2^{6-52} = 2^{-46}$. Se for usado o modo de arredondamento "para o mais próximo", então o erro absoluto não será superior a metade daquela amplitude, isto é, tem-se

$$|x - fl(x)| \leq 2^{-47},$$

   para x no intervalo $]70, s(70)[$. Para o erro relativo, tem-se

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{2^{-47}}{|x|}$$

   e, por ser $|x| > 2^6$,

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} < 2^{-53}.$$

2. Executando, no Matlab,

```
>> soma=0; for i=0:99, soma=soma+ (-1)^i / (2*i +  1); end; soma
```

   obtem-se o resultado

```
>> soma=0.7829
```

   Por se tratar de uma série alternada, o erro de truncatura é inferior ao valor do primeiro termo desprezado, isto é,

$$|\pi/4 - soma| < \frac{1}{201}.$$

3. Para todo x tal que $cos(x) \neq 0$, em aritmética exata é $f(x) = 1$, como resulta da fórmula fundamental da trigonometria $sin(x)^2 + cos(x)^2 = 1$. Porém, em aritmética computacional, se x for tal que $sin(x)$ está muito próximo de 1, então ocorrerá cancelamento subtrativo no cálculo do numerador. Por exemplo, executando no Matlab

```
>> f=inline('(1-sin(x)^2)/cos(x)^2'); f(pi/2+1e-10)
```

obtem-se o resultado 0 (resultado exato é 1, recorde-se).

4. Seja p_2 o polinómio de grau 2 que interpola a função $g(x) = 1/x$ nos nós $x_0 = 1, x_1 = 5/3$ e $x_2 = 2$.

   a)

   $$p_2(x) = 1\times\frac{(x-5/3)(x-2)}{(1-5/3)(1-2)}+\frac{3}{5}\times\frac{(x-1)(x-2)}{(5/3-1)(5/3-2)}+\frac{1}{2}\times\frac{(x-1)(x-5/3)}{(2-1)(2-5/3)}$$

   b)
   ```
   >> poLagrange([1, 5/3, 2],[1, 3/5,1/2],1.7)

        0.5870
   ```

   c)

   $$|p_2(1.7) - g(1.7)| = |(1.7-1)(1.7-5/3)(1.7-2)| \times \frac{|g'''(\theta)|}{3!}$$

   onde θ é um ponto que está entre 1 e 2. Uma vez que $|g'''(x)| = 3!/x^4$ toma, entre 1 e 2, o valor máximo de 3! (para $x = 1$), podemos escrever

   $$|p_2(1.7) - g(1.7)| \leq |(1.7-1)(1.7-5/3)(1.7-2)| \times 1.$$

   ```
   >> x=1.7; abs((x-1)*(x-5/3)*(x-2))

   >> 0.0070
   ```

   a) No Matlab, definimos a função

   ```
   >>  T=inline('5200-1000*(1+r)/r*((1+r)^5-1)')
   ```

   T não está definida para $r = 0$ pelo que devemos usar um valor pequeno maior do que 0. De

   ```
   >> T(eps), T(0.05)
   ans =

     200.0000



   ans =

    -601.9128
   ```

   conclui-se que existe uma raíz da equação $T(x) = 0$ entre eps e 0.05 (uma vez que T é contínua neste intervalo).

   b)

   ```
   >> a=eps; b=0.05; m=(a+b)/2, T(m)

   m =
   ```

```
    0.0250


ans =

 -187.7367

>> b=m; m=(a+b)/2, T(m)

m =

    0.0125


ans =

    9.3456

>> a=m; m=(a+b)/2, T(m)

m =

    0.0188


ans =

  -88.3809

>> b=m; m=(a+b)/2, T(m)

m =

    0.0156


ans =

  -39.3154

>> b=m; m=(a+b)/2, T(m)

m =

    0.0141


ans =
```

```
  -14.9345

>> b=m; m=(a+b)/2, T(m)

m =

    0.0133


ans =

   -2.7819

>> b=m; m=(a+b)/2, T(m)

m =

    0.0129


ans =

    3.2850

>> a=m; m=(a+b)/2, T(m)

m =

    0.0131


ans =

    0.2523
```

Com dois algarismos significativos, o valor da raiz da equação é 0.013 que corresponde a uma taxa de 1,3%.