UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2 horas	17 de novembro de 2016
TESTE 1 (COM CONSULTA)	

1. No formato duplo da norma IEEE 754, um número x normalizado expressa-se na forma

$$x = \pm\left(1.b_1 b_2 \cdots b_{52}\right)_2 \times 2^E$$

onde $b_i = 0$ ou $b_i = 1$, para cada $i = 1, \cdots, 52$, e $-1022 \leq E \leq 1023$. Denotamos por $\mathcal{F}$ o conjunto dos números deste sistema.

a) Qual é a representação de $x = 10$ no formato anterior, isto é, quais os valores de $b_i, i = 1, \cdots, 52$, e de E?

b) Seja s o sucessor de $x = 10$ em $\mathcal{F}$. Determina majorantes para os erros $|y - fl(y)|$ e $\frac{|y-fl(y)|}{y}$ onde $y \in]10, s[$ e $fl(y)$ é o valor arredondado de y.

2. **a)** Usa a função inline do Matlab para definir

$$f(x) = \frac{1 - cos(x)}{x^2}.$$

Em seguida, calcula os valores $r_k = f(10^{-k})$ para k inteiro desde 1 at 10. Na tua folha de respostas escreve o código executado e os resultados obtidos em "format short e".

b) À medida que k aumenta, os valores de $r_k = f(10^{-k})$ começam a aproximar-se de 0.5 mas a partir de certo k afastam-se desse valor limite. Explica, o mais detalhadamente possível, qual é a causa do problema.

3. **a)** A partir do desenvolvimento em série de potências de x

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

deduz o desenvolvimento em série de potências de x de $f(x) = \frac{1-cos(x)}{x^2}$.

b) Do desenvolvimento que obtiveste antes podes garantir que o erro de truncatura que se comete quando se aproxima $f(10^{-5})$ por 0.5 é inferior a 10^{-11}? Porquê?

c) Usa a mesma série para calcular o mais exatamente possível o valor de $f(10^{-5})$ e escreve o resultado obtido no Matlab em "format long e".

4. Faz uma breve análise comparativa da convergência dos métodos da bisseção e de Newton-Raphson na solução de equações não lineares.

5. O inverso aritmético de um número $b \neq 0$ é solução da equação $x = x(2 - bx)$ e, para o seu cálculo aproximado, pode usar-se a fórmula iterativa

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$$

onde $\varphi(x^{(k)}) = x^{(k)}(2 - bx^{(k)})$.

a) Mostra que, dado $b > 0$, a aproximação inicial $x^{(0)}$ deve satisfazer a condição

$$1/2 < b.x^{(0)} < 3/2$$

para garantir a convergência do método.

b) Tendo em conta o resultado anterior, podes concluir que o método será convergente no caso de ser $b = 1024$ e $x^{(0)} = 0.01$? Porquê?

c) Para calcular o inverso de $b = 1024$, o mais exatamente possível, usa a fórmula iterativa anterior com $x^{(0)} = 0.001$. Na tua folha de respostas escreve apenas as iterações obtidas em "format long e".

questão	1a	1b	2a	2b	3a	3b	3c	4	5a	5b	5c	Total
cotação	2	2	2	2	1	2	2	2	2	1	2	20

RESOLUÇÃO

1. **a)** Uma vez que $10 = 2^3 + 2^1$, tem-se

$$x = \pm\,(1.010\cdots 00)_2 \times 2^3,$$

isto é, $b_2 = 1$, $b_i = 0$ para os restantes valores de $i = 1, 3, \cdots 52$ e $E = 3$.

b) Uma vez que

$$s = \pm\,(1.010\cdots 01)_2 \times 2^3 = 10 + 2^{-49}$$

a amplitude do intervalo $[x, s]$ é igual a 2^{-49} e podemos afirmar que

$$|y - fl(y)| < 2^{-49},$$

qualquer que seja $y \in [10, 10 + 2^{-49}]$ e qualquer que seja o modo de arredondamento usado. Para o erro relativo tem-se

$$\frac{|y - fl(y)|}{|y|} < eps = 2^{-52}$$

e enfatiza-se que isto é verdade para qualquer número y normalizado, independentemente da sua grandeza.

2. **a)** Para definir no Matlab a função dada, executamos

```
>> f=inline('(1-cos(x))/x^2')
```

e, em seguida,

```
>> for k=1:10, r(k)=f(10^-k); end, format short e, r'
```

produz

```
ans =
   4.9958e-01
   5.0000e-01
   5.0000e-01
   5.0000e-01
   5.0000e-01
   5.0004e-01
   4.9960e-01
            0
            0
            0
```

b) Ocorre cancelamento subtrativo no cálculo do numerador porque, à medida que k aumenta, $cos(10^{-k})$ aproxima-se do valor 1 e há perda de muitos algarismos significativos na subtração, tantos mais algarismos quanto mais próximos estiverem os valores 1 e $cos(10^{-k})$.

3. **a)** Resulta

$$\frac{1 - cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \cdots$$

b) Sim. Numa série alternada o erro de truncatura é inferior ao valor absoluto do primeiro termo que se despreza. Neste caso, aproximando $f(10^{-5})$ pelo primeiro termo, que é igual a 0.5, cometemos um erro de truncatura que é inferior a

$$\frac{(10^{-5})^2}{4!} = \frac{10^{-10}}{24} < 10^{-11}.$$

c) Executando

```
>> x=1e-5; 0.5-x^2/factorial(4)+x^4/factorial(6)
```

obtemos o resultado $4.999999999958333e{-}01$ e este valor não se altera se adicionarmos mais um termo, isto é,

```
>> x=1e-5; 0.5-x^2/factorial(4)+x^4/factorial(6)-x^6/factorial(8)
```

produz o mesmo resultado.

4. Se o intervalo inicial $[a, b]$ é tal que $f(a)f(b) < 0$, então método da bisseção garantidamente calcula uma raiz de $f(x) = 0$ entre a e b. Porém, a convergência é apenas linear já que o erro em cada iteração é apenas metade do erro na iteração anterior (a amplitude do novo intervalo é metade da amplitude do intervalo anterior). Por seu lado, o método de Newton-Raphson nem sempre converge, isto é, existem casos em que é necessário que a aproximação inicial esteja já muito próxima da raiz. Em compensação, este método exibe, em geral, para raízes simples (isto é, de multiplicidade igual a 1), convergência mais rápida do que o método da bisseção. Mais concretamente, nestes casos a convergência é quadrática (a ordem de convergência é igual a 2), tendo-se, para k suficientemente grande, a seguinte relação entre os erros de iterações sucessivas

$$e_{k+1} \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} e_k^2$$

onde r denota a raiz da equação.

5. **a)** Em geral, se existir um intervalo I que contem a raiz da equação $x = \varphi(x)$ e onde se verifica a condição $|\varphi'(x)| < 1$, então o método do ponto fixo converge desde que $x^{(0)} \in I$. Neste caso, tem-se $\varphi'(x) = 2(1 - bx)$ e de

$$|2(1 - bx^{(0)})| < 1$$

resulta sucessivamente

$$\begin{aligned} -1 < 2(1 - bx^{(0)}) < 1 \\ -\frac{1}{2} < 1 - bx^{(0)} < \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} < -bx^{(0)} < -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

e finalmente

$$\frac{1}{2} < bx^{(0)} < \frac{3}{2}.$$

b) Não, porque tem-se $bx^{(0)} = 1024 \times 0.01 = 10.24$ e a condição anterior não é cumprida.

c) Definindo no Matlab a aproximação inicial

```
>> x=0.001
```

e executando sucessivamente

```
>> x=x*(2-1024*x)
```

obtemos as aproximações

```
9.760000000000000e-04
9.765621760000001e-04
9.765624999998927e-04
9.765625000000000e-04
9.765625000000000e-04
```

Uma vez que coincidem os dois últimos valores, está calculada, o mais exatamente possível, a solução da equação (isto é, o inverso de 1024).