UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2h 30m	1 de fevereiro de 2020
Exame de recurso (COM CONSULTA)	

Deves escrever na tua folha de respostas todos os comandos executados no Matlab.

1. Considera o desenvolvimento em série da função exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

   a) Para $x = -100$, quantos termos da série têm valor absoluto maior do que 10^{-5}? (nota: podes usar o código disponível na Blackboard que te permite determinar aquele número).

   b) Por que razão este desenvolvimento em série não é adequado para calcular diretamente o valor de e^{-100}?

2. Considera a função $f(x) = (x-1)log(x)$.

   a) Partindo de $x^{(0)} = 0.9$, faz 6 iterações do método de Newton-Raphson e escreve na tua folha de respostas o resultado de cada uma delas.

   b) Parece-te que a sequência de aproximações está a convergir para a raiz da equação $f(x) = 0$ e a convergência é quadrática? Justifica.

3. De uma certa função g conhecem-se os valores a seguir tabelados

x	0	0.2	0.3	0.35	0.4	0.45	0.6	0.8
g(x)	1	0.9933	0.9851	0.9797	0.9735	0.9666	0.9411	0.8967

Sejam p e q os polinómios de grau não superior a 3 que interpolam a função g nos nós $[0, 0.2, 0.6, 0.8]$ e $[0.3, 0.35, 0.4, 0.45]$, respetivamente.

   a) Determina (em format short) os valores de A, B e C tais que

$$p(x) = 1 + A(x-0) + B(x-0)(x-0.2) + C(x-0)(x-0.2)(x-0.6)$$

   (nota: podes usar um código disponível na Blackboard).

   b) Qual dos valores $p(0.39)$ e $q(0.39)$ será, em princípio, uma melhor aproximação para $g(0.39)$? Porquê? Por que é que não podemos ter a certeza?

4. Sejam

$$T = \begin{bmatrix} 2^{-52} & \sqrt{2} & & & \\ \sqrt{2} & 2 & -1 & & \\ & -1 & 3 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 5 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Usa a função **GaussElim** desenvolvida nas aulas para resolver o sistema $Tx = b$.

b) Estás seguro de que a aproximação obtida para a solução está correta? Porquê?

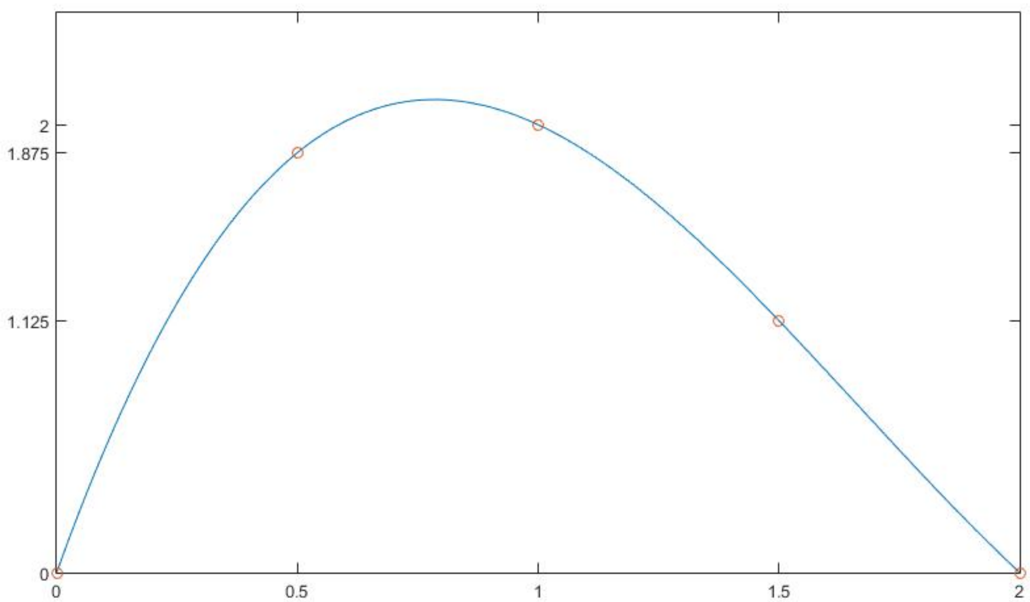
c) No Matlab, executa

```
>> S =P*T*P; y=S\(P*b), x=T\b
```

Qual é a relação entre x e y?

5. a) Usa uma regra de quadratura numérica para calcular, sem erro de truncatura, o valor da área da figura representada, compreendida entre o eixo dos xx e o gráfico de um polinómio r de grau 3 (nota: na figura indicam-se alguns valores de x e os correspondentes valores de $r(x)$ mas deves optar por não usar todos).

b) Justifica a escolha que fizeste na alínea anterior da regra de quadratura usada.



questão	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	Total
cotação	1,5	2	2	2	2	2	1,5	1,5	1,5	2	2	20

RESOLUÇÃO

1. a) Observe-se que, para $x = -100$, não é possível no Matlab o cálculo direto do valor de $x^n/n!$ para $n > 154$. Com efeito, tem-se

```
>> n=154; [x^n, factorial(n), x^n/factorial(n)]

ans =

  1.0000e+308  3.0898e+271   3.2365e+36

>> n=155; [x^n, factorial(n), x^n/factorial(n)]

ans =

         -Inf  4.7891e+273         -Inf
...

>> n=170; [x^n, factorial(n), x^n/factorial(n)]

ans =

          Inf  7.2574e+306          Inf

>> n=171; [x^n, factorial(n), x^n/factorial(n)]

ans =

  -Inf   Inf   NaN
```

Isto acontece porque o cálculo do numerador x^n produz Inf, ou seja, o número é, em valor absoluto, maior do que realmax, o maior número representável no sistema, aproximadamente igual a 1.79×10^{308}. No caso do denominador, isto também acontece a partir de $n = 171$ (e Inf/Inf produz NaN). Portanto, para calcular o valor de $x^n/n!$ temos de usar a fórmula de recorrência em que cada termo é obtido do anterior multiplicando por x/n, tal como se ilustra no código seguinte

```
>> x=-100; n=0; termo(1)=1; while abs(termo(end)) > 1e-5,...
   n=n+1; termo(end+1)=termo(end)*x/n; end, n

n =

   280
```

São pois 280 termos que têm valor absoluto maior do que 10^{-5}. Confirmando

```
>> termo(280)

ans =

  -1.6694e-05

>> termo(281)

ans =

   5.9622e-06
```

b) O valor de e^{-100} está muito próximo de zero e vai ser obtido, se for usado o desenvolvimento em série, como soma de termos de valor absoluto muito grande e de sinal contrário. Isto produzirá cancelamento subtrativo com a consequente perda de algarismos significativos.

2. a) De $f(x) = (x-1)log(x)$ resulta $f'(x) = log(x) + (x-1)/x$ (seguindo a sintaxe do Matlab, $log(x)$ é o logaritmo natural de x). Definimos no Matlab estas funções, usando derf para a derivada f'

```
>> f=inline('(x-1)*log(x)')

f =

     Inline function:
     f(x) = (x-1)*log(x)

>> derf=inline('log(x)+1-1/x')

derf =

     Inline function:
     derf(x) = log(x)+1-1/x
```

e partir da aproximação inicial $x^{(0)}$ fazemos seis iterações do método de Newton-Raphson

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Não usaremos os indices indicativos de iteração, para simplificar a escrita das instruções a executar no Matlab)

```
>> x=0.9

x =

    0.9000
```

```
>> x=x-f(x)/derf(x)

x =

    0.9487

>> x=x-f(x)/derf(x)

x =

    0.9740

>> x=x-f(x)/derf(x)

x =

    0.9869

>> x=x-f(x)/derf(x)

x =

    0.9934

>> x=x-f(x)/derf(x)

x =

    0.9967

>> x=x-f(x)/derf(x)

x =

    0.9984
```

b) As aproximações estão a convergir para a raiz da equação, que é igual a um. Porém, a convergência não é quadrática e isto acontece porque a raiz não é simples, tem multiplicidade igual a dois ($x = 1$ anula ambos os factores $x - 1$ e $log(x)$).

3. a) A expressão apresentada para $p(x)$ é a fórmula interpoladora de Newton. Os valores pedidos, A, B e C, são as diferenças dividas relativas aos nós $[0, 0.2, 0.6, 0.8]$ e podem ser calculados de modo facil usando a function **TabDifDiv** desenvolvida nas aulas.

```
>> x=[0,0.2,0.6,0.8]; gx=[1,0.9933,0.9411,0.8967];
```

```
>> T=TabDifDiv(x,gx)

T =

    1.0000         0         0         0
    0.9933   -0.0335         0         0
    0.9411   -0.1305   -0.1617         0
    0.8967   -0.2220   -0.1525    0.0115
```

Daqui se conclui que $A = -0.0335, B = -0.1617$ e $C = 0.0115$.

b) O valor de $q(0.39)$ será, em princípio, melhor aproximação para $g(0.39)$ do que $p(0.39)$ porque no ponto $x = 0.39$ é menor o valor absoluto do polinómio nodal relativo aos nós usados por q do que o valor absoluto do polinómio nodal relativo aos nós usados por p

```
x =

    0.3900

>> (x-0.3)*(x-0.35)*(x-0.4)*(x-0.45)   % valor do pol. nodal relativo a q

ans =

   2.1600e-06

>> (x-0)*(x-0.2)*(x-0.6)*(x-0.8)       % valor do pol. nodal relativo a p

ans =

    0.0064
```

De acordo com a expressão do erro cometido na interpolação polinomial e usando os resultados anteriores, temos

$$g(0.39) - q(0.39) = 2.1600e - 06 \times \frac{g^{(iv)}(\xi)}{4!}$$

e

$$g(0.39) - q(0.39) = 0.0064 \times \frac{g^{(iv)}(\theta)}{4!}$$

onde $\xi \in [0.3, 0.45]$ e $\theta \in [0, 0.8]$. Embora tal seja improvável, pode acontecer que $|g^{(iv)}(\theta)|$ seja muito menor do que $|g^{(iv)}(\xi)|$ e que, apesar dos valores dos polinómios nodais, $p(0.39)$ tenha menor erro do que $q(0.39)$, na aproximação de $g(0.39)$.

4. a) Introduzimos os dados

```
>> d=[eps 2 3 4 5]; e=[sqrt(2) -1 -1 -1];...
    T=diag(d)+diag(e,-1)+diag(e,1)
```

```
T =

    0.0000    1.4142         0         0         0
    1.4142    2.0000   -1.0000         0         0
         0   -1.0000    3.0000   -1.0000         0
         0         0   -1.0000    4.0000   -1.0000
         0         0         0   -1.0000    5.0000

>> P=fliplr(eye(5))

P =

     0     0     0     0     1
     0     0     0     1     0
     0     0     1     0     0
     0     1     0     0     0
     1     0     0     0     0

>> b=ones(5,1)

b =

     1
     1
     1
     1
     1
```

e usamos, de seguida, a função referida

```
> x=GaussElim(T,b)

x =

    1.0000
    0.7071
    0.7391
    0.5103
    0.3021
```

b) Como a função **GaussElim** implementa o método de eliminação de Gauss sem pivotação, podem ocorrer erros importantes (o que de facto acontece como se pode concluir da comparação do resultado obtido antes com o resultado dado por

```
>> T\b
```

c)
```
>> S=P*T*P; y=S\(P*b), x=T\b

y =
```

```
    0.3021
    0.5103
    0.7391
    0.7071
    0.2298


x =

    0.2298
    0.7071
    0.7391
    0.5103
    0.3021
```

Como se pode observar, os vetores x e y diferem por permutação das suas entradas; tal permutação é dada pela matriz P. Com efeito, tem-se

```
>> P*x

ans =

    0.3021
    0.5103
    0.7391
    0.7071
    0.2298
```

e a relação é, portanto, $y = Px$ (esta relação também pode ser deduzida a partir das relações $S = P.T.P, S.y = P.b$ e $Tx = b$).

5. a)

```
>> 1/3*(0 + 4*2 + 0)

ans =

    2.6667
```

b) Uma vez que a regra de Simpson tem grau (de precisão) igual a 3, isto é, é exata para todos os polinómios de grau não superior a 3, usámos a regra simples (neste caso, é $h = 1$) para calcular, sem erro, o valor do integral. Aplicando a regra composta com $h = 0.5$ (a informação necessária para isto está disponível no gráfico) obtem-se, com mais trabalho, o mesmo resultado.