UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2 horas e 30 minutos — 18 de julho de 2022

EXAME (ÉPOCA ESPECIAL)

Escreve na tua folha de respostas os comandos executados no Matlab

1. No Matlab

```
>> (2+eps)+eps==2+2*eps
```

   produz o valor lógico 0. Explica detalhadamente por que é que tal acontece.

2. Se $\tilde{a}$ é uma aproximação de a com três algarismos significativos corretos, podemos concluir que $\sqrt{\tilde{a}}$ aproxima $\sqrt{a}$ com pelo menos três algarismos significativos corretos? Justifica a tua resposta.

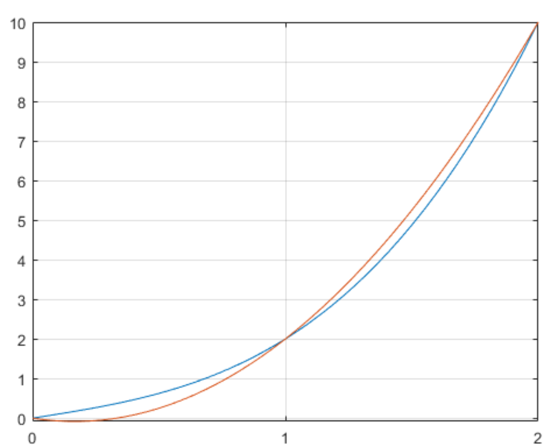
3. Calcula $\sqrt{10}$ tão exatamente quanto possível sem usar a função sqrt do Matlab. Apresenta os cálculos efetuados.

4. Dados quatro pontos $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, 3$ tais que $y_0 = y_1 = y_2 \neq y_3$ (os x_i são todos distintos)

   a) Qual é a curva que passa pelos três primeiros pontos? Justifica.

   b) Determina o polinómio p tal que $p(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, 3$.

5. Na figura seguinte, um dos gráficos é o de um polinómio de grau 2, o outro gráfico é o de um polinómio de grau 3.



   Tendo em conta a expressão do erro de truncatura de uma conhecida regra de integração numérica, mostra que a área da região entre as duas curvas no intervalo [0,1] é igual à área da região entre as duas curvas no intervalo [1,2].

6. Os seguintes sistemas são equivalentes

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 6 \\ & 2^{-52}x_2 & +x_3 & = 10 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 6 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \\ & 2^{-52}x_2 & +x_3 & = 10 \end{cases}$$

a) Usa a função *GaussElim* para aproximar a solução de cada um dos sistemas e escreve os resultados obtidos na tua folha de respostas;

b) Qual das aproximações está correta? Qual é a causa dos erros da outra aproximação?

questão	1	2	3	4a	4b	5	6a	6b	Total
cotação	2,5	3	3	2	2	3	2	2,5	20

RESOLUÇÃO

1. Tem-se $eps = 2^{-52}$ e no conjunto dos números de ponto flutuante no formato duplo da norma IEEE, $1+eps$ é o sucessor de 1, logo o sucessor de 2 é $2+2*eps$ que é representado exatamente. Assim, $2+eps$ será arredondado para 2 e o valor produzido por $(2+eps)+eps$ é 2.

2. Sim, porque o número de condição relativo da função $f(x) = \sqrt{x}$ é

$$x.\frac{f'(x)}{f(x)} = x\frac{1/2x^{-1/2}}{x^{1/2}} = 1/2$$

o que mostra que o erro relativo em $\sqrt{\tilde{a}}$ não é maior do que o erro relativo em $\tilde{a}$.

3. Sendo $\sqrt{10}$ solução da equação $x^2 - 10 = 0$ vamos usar um método iterativo para resolver esta equação. Por exemplo, usando o método de Newton-Raphson temos a fórmula iterativa

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 10}{2 * x_k}$$

e com $x_0 = 3$ obtemos sucessivamente as aproximações

```
3.166666666666667
3.162280701754386
3.162277660169842
3.162277660168380
```

4. **a)** A curva que passa pelos três pontos que têm a mesma ordenada é a reta horizontal $y = y_0$.

   b) Têm-se as seguintes diferenças divididas

$$f[x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] = 0;\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{y_3 - y_0}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)}$$

   e a fórmula interpoladora de Newton dá

$$p(x) = y_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{y_3 - y_0}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)}.$$

5. A regra de quadratura de Simpson baseia-se na aproximação da função integranda pelo polinómio de grau 2 que interpola a função nos extremos do intervalo de integração e também no ponto médio desse intervalo. Umavez que a regra é exata para polinómios de grau não superior a 3, conclui-se que são iguais os integrais entre 0 e 2 dos polinómios cujos gráficos se apresentam na figura.

6. **a)** Para o primeiro sistema tem-se

```
 >> A=[1 2 3; 0 2^-52 1; 0 1 1]; b=[6 10 1]';
>> x=GaussElim(A,b)
x =

   -8.0000
   -8.0000
   10.0000
```

e para o segundo sistema

```
>> A=[1 2 3;  0 1 1; 0 2^-52 1]; b=[6 1 10]';
>> x=GaussElim(A,b)
x =

   -6.0000
   -9.0000
   10.0000
```

b) A solução do segundo sistema está correta mas o mesmo não acontece com o primeiro. O problema é a ocorrência de um grande multiplicador na eliminação de $A(3,2) = 1$ usando o pivot $A(2,2) = 2^{-52}$. Isto faz com que o sistema triangular produzido tenha um número de condição muito grande e pequenos erros de arredondamento causam grandes erros na solução, como se pode ver no resultado obtido.