UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2 horas e 30 minutos	14 de janeiro de 2023
TESTE 2 (COM CONSULTA)	

Escreve na tua folha de respostas os comandos executados no Matlab.

1. Seja p o polinómio de **menor grau** tal que

$$p(1) = \alpha,\ p(2) = \beta,\ p(3) = \gamma$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Dependendo dos valores de α, β e γ, quais são os graus que o polinómio p pode ter? Justifica a resposta.

b) Calcula a tabela das diferenças divididas e define $p(x)$, em função de α, β e γ, usando a fórmula interpoladora de Newton.

c) Que relações devem ser satisfeitas pelos valores de α, β e γ para que p seja de grau um? Justifica a resposta.

2. No Matlab, a execução de

```
>> E1=log(1.5)-poLagrange([1,2], log([1,2]),1.5)
>> E2=log(100.5)-polNewton([100,101], log([100,101]),100.5)
```

dá

```
E1 =    0.0589
E2 =   1.2376e-05
```

a) Interpretando os comandos executados, explica detalhadamente o que são $E1$ e $E2$.

b) Usa a expressão do erro do polinómio interpolador para explicar por que é que $|E2| < |E1|$.

3. **a)** Usa a regra de Simpson composta e os valores dados na tabela

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$f(x)$	1/2	1/2.125	1/2.25	1/2.375	1/2.5

para obter uma aproximação do valor de

$$I = \int_0^{0.5} f(x)dx.$$

Apresenta os cálculos efetuados.

b) Sabendo que a derivada de quarta ordem da função tabelada não excede, em módulo, no intervalo $[0,\ 0.5]$, o valor $M = 0.75$, determina um majorante para o erro cometido na aproximação calculada na alínea anterior.

4. Dado um intervalo real $[a, b]$, sejam q e r polinómios de graus 3 e 2, respetivamente, tais que
$$q(a) = r(a),\ q(b) = r(b),\ q(\frac{a+b}{2}) = r(\frac{a+b}{2}).$$
Podemos concluir que
$$\int_a^b q(x)dx = \int_a^b r(x)dx?$$
Justifica a resposta.

5. No Matlab, executa

```
>> A=[1  2  3; 4  5  6; 7  8  9]; b=A*ones(3,1); x=GaussElimPP(A,b)
```

e escreve x na tua folha de respostas. Qual é causa dos elevados erros na solução x obtida?

6. **a)** Dada uma matriz A quadrada, no Matlab

```
>>  [L U P]=lu(A)
```

dá as matrizes L, U e P. Que têm de especial estas matrizes e como se relacionam com a matriz A?

b) Descreve o processo que usa as matrizes L, U e P para resolver o sistema $Ax = b$.

questão	1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4	5	6a	6b	Total
cotação	1	2	1,5	1,5	2	2	2	2	2	2	2	20

RESOLUÇÃO

1. **a)** Dados três pontos, existe e é único o polinómio de grau não superior a dois, interpolador nesses pntos. Dependendo dos valores de α, β e γ, o polinómio pode ter grau dois (os pontos não são colineares), pode ter grau um (os pontos estão sobre uma reta não horizontal) ou grau zero (se os pontos estiverem sobre uma reta horizontal, o que acontece quando $\alpha = \beta = \gamma$).

   b) A tabela das diferenças divididas é a seguinte

$$\begin{array}{llll} 1 & \alpha & & \\ 2 & \beta & \beta-\alpha & \\ 3 & \gamma & \gamma-\beta & \frac{1}{2}(\gamma-2\beta+\alpha) \end{array}$$

   e o polinómio interpolador na forma de Newton é

$$p(x) = \alpha + (\beta-\alpha)(x-1) + \frac{1}{2}(\gamma-2\beta+\alpha)(x-1)(x-2)$$

   c) O coeficiente do termo de grau dois deve ser nulo, ou seja

$$\gamma - 2\beta + \alpha = 0,$$

   e o coeficiente do termo de grau um deve ser diferente de zero, isto é,

$$\alpha \neq \beta.$$

2. **a)** $E1$ é o valor do erro, no ponto $x = 1.5$, do polinómio que interpola a função **log** (logaritmo de base e) nos nós $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Aqui é usada a fórmula interpoladora de Lagrange. E_2 é o valor do erro, no ponto $x = 100.5$, do polinómio que interpola a mesma função **log** nos nós $x_0 = 100$ e $x_1 = 101$. Neste caso, é usada a fórmula interpoladora de Newton.

   b) Usando a expressão do erro do polinómio interpolador e tendo em conta que a derivada de segunda ordem de $log(x)$ é $-1/x^2$, tem-se

$$E1 = (1.5-1)(1.5-2)\frac{-1/\xi_1^2}{2} = \frac{0.125}{\xi_1^2}$$

   e

$$E2 = (100.5-100)(105-101)\frac{-1/\xi_2^2}{2} = \frac{0.125}{\xi_2^2}$$

   onde $\xi_1 \in [1,2]$ e $\xi_2 \in [100, 200]$. Por ser $\xi_2^2 > \xi_1^2$ é $|E2| < |E1|$.

3. **a)** Representando por $\tilde{I}$ a aproximação pedida, tem-se

$$\tilde{I} = \frac{0.125}{3}\left(f(0) + 4f(0.125) + 2f(0.25) + 4f(0.375) + f(0.5)\right)$$

   No Matlab

```
>> f=[1/2, 1/2.125, 1/2.25, 1/2.375, 1/2.5];
>> 0.125/3*(f(1)+4*f(2)+2*f(3)+4*f(4)+f(5))
```

dá a aproximação $\tilde{I} = 0.2231$.

b) Da expresssão do erro de truncatura da regra de Simpson

$$I - \tilde{I} = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)$$

resulta neste caso

$$|I - \tilde{I}| \leq= \frac{(0.125)^4}{180} \times 0.5 \times 0.75 \approx 5e - 7.$$

4. A regra (simples) de Simpson aproxima o integral $\int_a^b f(x)dx$ por $\int_a^b r(x)dx$ onde r é o polinómio de grau não superior a 2 tal que

$$r(a) = f(a),\ r(b) = f(b),\ r(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2}).$$

A regra de Simpson tem grau (de exatidão) igual a 2, isto é, ela é exata se f é um polinómio de grau não superior a 3. Portanto, concluímos que, sendo q um polinómio de grau 3, tem-se

$$\int_a^b q(x)dx = \int_a^b r(x)dx$$

5. O Matlab produz o resultado

```
x =
     0
     3
     0
```

que é muito diferente do vetor de unidades usado para produzir o vetor b dos termos independentes. Porém, é facil verificar que também o vetor produzido pelo Matlab é solução do sistema. O sistema é indeterminado. Pode verificar-se que todos os vetores da forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde a é um número arbitrário, são solução do sistema.

6. **a)** Tem-se

$$L * U = P * A$$

onde U é triangular superior e L é triangular inferior com unidades na diagonal principal. P é uma matriz de permutação e $P * A$ difere de A por troca de linhas.

b) O sistema $Ax = b$ é equivalente ao sistema $P * Ax = P * b$ porque uma matriz de permutação é invertível. Uma vez que $P * A = L * U$, então vamos resolver o sistema $(L * U)x = P * b$. Uma vez que $(L * U)x = L * (U * x)$, usando o vetor auxiliar $y = U * x$, a solução de $Ax = b$ será obtida resolvendo em primeiro lugar o sistema triangular inferior $Ly = Pb$ e, em seguida, o sistema triangular superior $Ux = y$.