UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2h 30m	7 de fevereiro de 2023
Exame de recurso (COM CONSULTA)	

Deves escrever na tua folha de respostas todos os comandos executados no Matlab.

1. Considera o desenvolvimento em série da função exponencial

$$exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

   a) Usa um código disponível na Blackboard para calcular, para $x = -30$, o valor s da soma dos termos da série cujo valor absoluto é superior a 10^{-6}.

   b) Na frase seguinte completa os espaços em branco: *em aritmética exata,* $|s - exp(-30)|$ *é inferior a............. porque...........*

   c) No Matlab calcula $|s - exp(-30)|$. Qual é a causa deste erro?

2. Considera a função definida por $f(x) = (x + 2)log(x + 3)$.

   a) Uma vez que $f(-2.5)$ e $f(-1.5)$ são ambos positivos, podemos concluir que não existe nenhuma raíz da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[-2.5, -1.5]$? Justifica a resposta.

   b) Partindo de $x^{(0)} = -1.99$, faz 5 iterações do método de Newton-Raphson e escreve na tua folha de respostas o resultado de cada uma delas (em "format short").

   c) Parece-te que a sequência de aproximações está a convergir para a raiz da equação $f(x) = 0$ e a convergência é quadrática? Justifica.

3. De uma certa função g conhecem-se os valores a seguir tabelados

x	0	0.2	0.3	0.35	0.4	0.45	0.6	0.8
g(x)	1	0.9933	0.9851	0.9797	0.9735	0.9666	0.9411	0.8967

Sejam p e q os polinómios de grau não superior a 3 que interpolam a função g nos nós $[0, 0.2, 0.6, 0.8]$ e $[0.3, 0.35, 0.4, 0.45]$, respetivamente.

   a) Determina (em format short) os valores de A, B e C tais que

$$p(x) = 1 + A(x - 0) + B(x - 0)(x - 0.2) + C(x - 0)(x - 0.2)(x - 0.6)$$

   (nota: podes usar um código disponível na Blackboard).

   b) Qual dos valores $p(0.39)$ e $q(0.39)$ será, em princípio, uma melhor aproximação para $g(0.39)$? Porquê? Por que é que não podemos ter a certeza?

4. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2^{-52} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2^{-52} & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 8.14 \\ 9.10 \\ 1.30 \end{bmatrix}.$$

a) Determina α e β tais que $A = L \cdot U$.

b) No Matlab, define as matrizes L e U e o vetor b. Em seguida resolve o sistema $Ax = b$, usando para o efeito as matrizes L e U (usa a função do Matlab para a resolução dos dois sistemas triangulares).

c) É de esperar que a solução x calculada tenha erros grandes. Explica porquê.

5. Seja

$$I(a) = \int_a^{a+1} log(x)dx,$$

onde $log(x)$ representa o logaritmo natural de x e a é um número positivo.

a) Usa a função disponível na Blackboard que implementa uma regra de grau 3, com $h = 0.1$, para calcular aproximadamente os valores de $I(a)$ para $a = 0.01$ e $a = 2$.

b) Qual das aproximações calculadas tem menor erro, a de $I(0.01)$ ou a de $I(2)$? Usa a expressão do erro de truncatura da regra usada para justificares a tua resposta.

questão	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	Total
cotação	1	1,5	1,5	1	1,5	1,5	2	2	1,5	1,5	1,5	1,5	2	20

RESOLUÇÃO

1. a)
```
>> s=expTaylor(-30,1e-6)

s =

  -3.1145e-05
```

   b) *em aritmética exata, $|s - exp(-30)|$ é inferior a 10^{-6} porque numa série alternada o valor absoluto do erro de truncatura é inferior ao valor absoluto do primeiro termo que se despreza*

   c)
```
>> abs(s-exp(-30))

ans =

   3.1145e-05
```
   Este valor é superior ao erro de truncatura que, como se disse antes, é inferior a 10^{-6}. O erro é devido ao cancelamento subtrativo uma vez que a soma s é de grandeza inferior à das parcelas de maior grandeza somadas.

2. a) Tal não se pode concluir. Em geral, se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) > 0$, o que se pode dizer é que a equação $f(x) = 0$ não tem raízes ou tem um número par de raízes entre a e b. No caso presente, $x = -2$ é raiz dupla uma vez que anula $(x + 2)$ e também $log(x + 3)$.

   b)
```
>> f=@(x) (x+2)*log(x+3);    df=@(x)log(x+3)+(x+2)/(x+3);  x=-1.99;
>> x=x-f(x)/df(x)

x =

   -1.9950

>> x=x-f(x)/df(x)

x =

   -1.9975

>> x=x-f(x)/df(x)

x =

   -1.9988

>> x=x-f(x)/df(x)

x =
```

```
   -1.9994

>> x=x-f(x)/df(x)

x =

   -1.9997
```

c) As aproximações estão a convergir para a raiz da equação, que é igual a -2. Porém, a convergência não é quadrática, é apenas linear, e isto acontece porque a raiz não é simples, tem multiplicidade igual a dois, como já se fez notar antes.

3. a) A expressão apresentada para $p(x)$ é a fórmula interpoladora de Newton. Os valores pedidos, A, B e C, são as diferenças dividas relativas aos nós $[0, 0.2, 0.6, 0.8]$ e podem ser calculados usando a function **TabDifDiv** desenvolvida nas aulas.

```
>> x=[0,0.2,0.6,0.8]; gx=[1,0.9933,0.9411,0.8967];

>> T=TabDifDiv(x,gx)

T =

    1.0000         0         0         0
    0.9933   -0.0335         0         0
    0.9411   -0.1305   -0.1617         0
    0.8967   -0.2220   -0.1525    0.0115
```

Daqui se conclui que $A = -0.0335, B = -0.1617$ e $C = 0.0115$.

b) O valor de $q(0.39)$ será, em princípio, melhor aproximação para $g(0.39)$ do que $p(0.39)$ porque no ponto $x = 0.39$ é menor o valor absoluto do polinómio nodal relativo aos nós usados por q do que o valor absoluto do polinómio nodal relativo aos nós usados por p

```
x =

    0.3900

>> (x-0.3)*(x-0.35)*(x-0.4)*(x-0.45)   % valor do pol. nodal relativo a q

ans =

   2.1600e-06

>> (x-0)*(x-0.2)*(x-0.6)*(x-0.8)       % valor do pol. nodal relativo a p

ans =
```

```
0.0064
```

De acordo com a expressão do erro cometido na interpolação polinomial e usando os resultados anteriores, temos

$$g(0.39) - q(0.39) = 2.1600e - 06 \times \frac{g^{(iv)}(\xi)}{4!}$$

e

$$g(0.39) - q(0.39) = 0.0064 \times \frac{g^{(iv)}(\theta)}{4!}$$

onde $\xi \in [0.3, 0.45]$ e $\theta \in [0, 0.8]$. Embora tal seja improvável, pode acontecer que $|g^{(iv)}(\theta)|$ seja muito menor do que $|g^{(iv)}(\xi)|$ e que, apesar dos valores dos polinómios nodais, $p(0.39)$ tenha menor erro do que $q(0.39)$, na aproximação de $g(0.39)$.

4. a) Multiplicando a terceira linha de L pela segunda coluna de U devemos obter A(3,2), ou seja, $\alpha \times 2^{-52} = 1$, donde $\alpha = 2^{52}$. Agora multiplicamos a terceira linha de L pela terceira coluna de U e igualamos a A(3,3), isto é, $\alpha + \beta = 1$, donde $\beta = 1 - 2^{52}$.

b)
```
>> L=[1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 2^52, 1]; U=[1, 1, 2; 0, 2^-52, 1; 0, 0, 1-2^52];
>> b=[8.14; 9.10; 1.30];


>> y=L\b

y =

   1.0e+16 *

    0.0000
    0.0000
   -4.0983

>> x=U\y
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurat


x =

   -2.0600
   -8.0000
    9.1000
```

c) É de esperar que a solução tenha erros grandes porque os sistemas $Ly = b$ e $Ux = y$ são mal condicionados por serem muito grandes os números de condição

```
>> cond(L)
```

```
ans =

   2.0282e+31

>> cond(U)

ans =

   1.3494e+17
```

5. a) Vamos usar a regra composta de Simpson que é exata para polinómios de grau não superior a 3 (é uma regra de grau 3). De $h = 1/n = 0.1$ resulta $n = 10$.

```
>> simpson(@log,0.01,1.01,10)

ans =
   -0.9621

>> simpson(@log,2,3,10)

ans =

    0.9095
```

b) Denotando por $\tilde{I}(a)$ a aproximação calculada com a regra de Simpson, tem-se

$$I(0.01) - \tilde{I}(0.01) = -\frac{0.1^4}{180} \times 1 \times f^{(iv)}(\eta)$$

e

$$I(2) - \tilde{I}(2) = -\frac{0.1^4}{180} \times 1 \times f^{(iv)}(\xi)$$

onde η e ξ são pontos que estão nos intervalos $[0.01, 1.01]$ e $[2, 3]$, respetivamente. Uma vez que é, neste caso,

$$f^{(iv)}(x) = -6/x^4$$

conclui-se que

$$|f^{(iv)}(\eta)| > |f^{(iv)}(\xi)|$$

e será menor o erro da aproximação $\tilde{I}(2)$.